

Entwicklung eines Spline-Kurven basierten, symbolischen Wirbelsäulenmodells zur nichtinvasiven Bewegungsanalyse

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau und

Verfahrenstechnik der

Universität Duisburg-Essen

zur Erlangung des akademischen Grades

eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

Dr.-Ing.

genehmigte Dissertation

von

Dietmar Rosenthal

aus

Düsseldorf

Referent: Prof. Dr.-Ing. Andrés Kécskeméthy

Korreferent: Prof. Dr. med. Dr. rer. nat. Harald Hefter

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Februar 2016

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechanik und Robotik der Universität Duisburg-Essen.

Ich möchte meinen herzlichen Dank an Prof. Andrés Kecskeméthy aussprechen, für die intensiven fachlichen Gespräche, vielen Anregungen zur wissenschaftlichen Weiterentwicklung und die Unterstützung, die sich nicht nur auf den akademischen Bereich erstreckt. Dies gilt in gleicher Weise auch für Prof. Harald Hefter, der mich stets dazu ermutigt hat, mich wissenschaftlich und menschlich weiterzuentwickeln.

Ich danke Prof. Marcus Wimmer, Dr. Alejandro Espinoza Orias und allen ihren Kollegen von der Tribology Group der Rush University, Chicago, USA, ohne deren tatkräftige Unterstützung und fachliche Beratung die Ergebnisse in dieser Arbeit nicht zustande kommen konnten.

Großer Dank gebührt den Kollegen vom Lehrstuhl f. Mechanik und Robotik der Universität Duisburg-Essen, für die inspirierenden Gespräche und freundschaftliche Zusammenarbeit, insbesondere Dr. Francisco Geu Flores und Dr. Martin Tändl. Dank auch meiner Familie und Freunden für die viele Unterstützung, die ich erfahren habe.

Düsseldorf, im Januar 2017

Dietmar Rosenthal



EUROPÄISCHE UNION
Investition in unsere Zukunft
Europäischer Fonds
für regionale Entwicklung

Gefördert aus dem EFRE kofinanzierten operationellen Programm für NRW im Ziel2 „Regionale Wettbewerbsfähigkeit und Beschäftigung“ 2007-2013.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Einführung	3
1.2	Strukturierung der Arbeit	4
2	Methoden für die Darstellung und Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie	5
2.1	Vereinfachte geometrische Darstellung	5
2.1.1	Cobb-Winkel und Fergusonmethode	5
2.1.2	Verbundene Segmente	6
2.1.3	Kurvenbasierte Modelle	8
2.2	Mehrkörpermodelle der Wirbelsäule	11
2.3	Darstellungen auf Basis der Finite Elemente Methode	15
2.4	Zielsetzung der Arbeit	17
3	Methoden der Splinekurvendarstellung und des Splinekurvenfittings	19
3.1	Fundamentalgrößen einer Raumkurve	19
3.1.1	Bogenlängen-Parameter	19
3.1.2	Begleitendes Dreibein und Theorie der Streifen	21
3.1.3	Begleitendes Dreibein nach Darboux	25
3.2	Splinefunktionen und B-Splinekurven	27
3.2.1	B-Splinekurven	32
3.2.2	Splinekurven als Lösung eines Interpolationsproblems	34
3.2.3	Ausgewählte Methoden zur Knoten- und Parameterstellenwahl	37
3.3	Ermittlung von Splinekurven durch Optimierung	39

3.3.1	Minimale Energie-Methode nach Celniker und Gossard	39
3.3.2	Lösung isoperimetrischer Probleme durch sequentielle quadratische Programmierung	40
4	Symbolisches Wirbelsäulenmodell	45
4.1	Mathematisches Modell der posterioren Wirbellinie	45
4.1.1	Verallgemeinerte posteriore Wirbellinie und Interpolation	45
4.1.2	Festlegung der Darboux-Tetrahedra	50
4.2	Methode zur Schätzung einer i-PVLK aus gemessenen Markerpositionen .	55
4.2.1	Beziehung einer i-PVL zu gemessenen Markerpositionen	55
4.2.2	Beziehung einer i-PVLK zur neutralen Lage	57
4.3	Optimierungsansatz zur Ermittlung der Wirbellinie	60
5	Experimentelle Überprüfung des Konzepts	63
5.1	Einzelfall Lateralbeugung	63
5.1.1	Datenbasis für die Parameterbestimmung	63
5.1.2	Bestimmung der Modellparameter	65
5.1.3	Ergebnisse	70
5.1.4	Diskussion	72
5.2	Einzelfallexperiment Torsionsbewegung	75
5.2.1	Datenbasis	75
5.2.2	Vereinfachte Annahmen	80
5.2.3	Ergebnisse	88
5.2.4	Diskussion	88
6	Ausblick	91

Abbildungsverzeichnis

3.1	Trajektorie einer Raumkurve	20
3.2	Normalkrümmung und geodätische Krümmung	22
3.3	Geodätische Windung	24
3.4	Darboux-Streifen	26
3.5	Basissplines	30
3.6	B-Spline Rekursion	31
3.7	Konvexe Hülle des Kontrollpolygons	33
3.8	Optimierungsproblem	43
4.1	Wirbelmauerzentrum	47
4.2	Wirbellinie (PVL)	48
4.3	Neutrale Haltung und Flexion (nach Christophy u. a. (2012))	52
4.4	Antero-Posterior Radiograph (nach Putto und Tallroth (1990))	54
4.5	Krümmung der PVL	56
4.6	Kurvenmodell der Wirbelsäulenlinie	58
4.7	Diskretisierte geodätische Torsion	61
5.1	MRT des Probanden A	64
5.2	Händische Bestimmung der WMZ	65
5.3	Anfangslage und bewegte Lage Proband A	68
5.4	Histogramm der Konditionszahl	70
5.5	Geschätzte Rotation im Lumbarebereich	71
5.6	Geschätzte Rotation im Thoraxbereich	73
5.7	Proband B im Ganglabor	76

5.8	Abbildung der MRT-Messung auf CT-Messung	78
5.9	Ergebnis der Abbildung, Teil 1	82
5.10	Ergebnis der Abbildung, Teil 2	83
5.11	Fehlanpassung der i-PVL	87
5.12	Abstand der WMZ zur geschätzten i-PVL	89

1 Einleitung

1.1 Einführung

Die Bewegungsanalyse ist eine der zentralen Aufgaben der Biomechanik. Besondere Bedeutung kommt dabei der Rekonstruktion von menschlichen Bewegungen des täglichen Lebens aus gemessenen Daten zu, beispielsweise zur Diagnose von Pathologien der Bewegung, Erfolgskontrolle von Behandlungsmethoden derselben, oder aber zur Auswahl geeigneter Rehabilitationsmaßnahmen nach einer Diagnose. Nichtinvasive Methoden sind besonders hervorzuheben, da sie auch bei keinem Verdacht auf eine schwerwiegende oder sogar lebensbedrohende Störung ethisch vertretbar sind.

Das Studium der Kinematik und Dynamik der Wirbelsäule rückte dabei schon recht früh ins Zentrum des Interesses, mit der Arbeit von Hess und Lombard (1958), in der anhand eines einfachen Modells der Wirbelsäule als elastischer Stab die Dynamik des Oberkörpers eines Piloten, der den Schleudersitz betätigt, untersucht wurde. Es folgte eine lange Reihe von Arbeiten über die Wirbelsäule aus biomechanischer Sicht, von ähnlich vereinfachten Modellen, über detaillierteren Mehrkörperformulierungen, bis zu hochauflösenden Finite-Elemente-Methode-Modellen, die in dieser Arbeit unter dem Stichwort „Rekonstruktion und Darstellung der Wirbelsäulenlinie“ zusammengefasst werden.

In den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts schien sich die Erkenntnis durchzusetzen, dass das Studium der Dynamik und Kontrolle des Oberkörpers integraler Bestandteil der Ganganalyse sein sollte. Legt man Augenmerk auf die Vereinfachung der Wirbelsäule zu einem geometrischen Objekt wie einer Kurve oder mehrerer Kurvenstücke, so bietet sich die Gelegenheit, Funktion und Eigenart der Wirbelsäule und der ihr umgebenden anatomischen Einheiten des Oberkörpers zu klinischen Indizes in Form weniger Kennzahlen zu kondensieren, wie Don u. a. (2012) anmerken. Der Autor macht sich die Auffassung dieser Autoren zu eigen, dass die Bestimmung von solchen Indizes drei Kriterien erfüllen sollte:

1. Validität der Messtechnik zur Bestimmung, vorzugsweise anhand radiologischer Vergleichsmessungen.
2. Einfachheit der Handhabung und Kosteneffizienz im klinischen Alltag.
3. Klinische Bedeutsamkeit der gemessenen Parameter.

Zur Herleitung von solchen Indizes zur Funktion des Oberkörpers aus Messungen der Ganganalyse gibt es ermutigende Erfahrungen für eine Gruppe von hemiparetischen Apoplex-

Patienten auf Basis eines einfachen Modells zur Kennzeichnung des sogenannten Pusher Syndroms, siehe Danells u. a. (2004) und Hefter u. a. (2009). Es scheint nützlich, vereinfachte Modelle zur Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie weiter zu erforschen, um weitere solche Indizes definieren zu können.

Don u. a. (2012) stellen fest, dass die Vermessung eines Patienten mithilfe von auf der Haut an speziellen anatomischen Orientierungspunkten aufgebrachten Markern, im Folgenden nur noch Hautmarker genannt, und die stereophotogrammetrische Bestimmung ihrer Position eine Art Goldstandard in der nichtinvasiven Bewegungsanalyse darstellt. Bemühungen, ein vereinfachtes Wirbelsäulenmodell auf Basis von Splinekurven in diese Methodik mit aufzunehmen, gab es schon in den späten 80er Jahren, in der Arbeit von Bryant u. a. (1989). Es muss wiederum überraschen, dass es eine kleine Zahl an Arbeiten gibt, die diesen Ansatz fortführen, diese jedoch auf die Bestimmung der Wirbelsäulenhaltung in der Sagittalebene beschränkt sind. Die zentrale Idee der vorliegenden Arbeit ist daher, eine Methode zu entwickeln, die ein dreidimensionales Spline-Kurvenmodell aus Hautmarkerpositionen ableitet, die dem Problem der Hautartefakte speziell Rechnung trägt. Dieses Modell wird im weiteren Text, das „symbolische kontinuierliche Wirbelsäulenmodell“, oder kurz symbolisches Wirbelsäulenmodell, genannt.

1.2 Strukturierung der Arbeit

Im folgenden Kapitel wird der Stand der Technik in der Darstellung und Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie anhand der einschlägigen Literatur dargelegt. Aus dem Stand der Technik wird die Zielsetzung für diese Arbeit abgeleitet. In Kapitel 3 werden die mathematischen Objekte und Methoden erläutert, die in Kapitel 4 benutzt werden, um ein symbolisches, kontinuierliches Wirbelsäulenmodell zu definieren und an gemessene Markerdaten anzupassen. Experimente zur Evaluierung dieses symbolischen Wirbelsäulenmodells werden in Kapitel 5 behandelt. Im Schlußkapitel 6, wird ein Fazit gezogen und weitere Schritte für die Zukunft vorgeschlagen.

2 Methoden für die Darstellung und Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die Methoden zur Darstellung der Wirbelsäulenlinie die sich in der Literatur finden gegeben - als Darstellung des Stands der Technik. Es werden nur solche Methoden erwähnt, die im biomechanischen Kontext gebraucht werden, insbesondere zur numerischen und quantitativen Analyse der Funktion der Wirbelsäule. Die Methoden werden dabei aufgeschlüsselt in vereinfachte geometrische Darstellungen, Mehrkörperformulierungen der Wirbelsäule bzw. funktional-anatomische Modelle, sowie Methoden unter Gebrauch der Finiten-Elemente-Methode. Für die eher klinisch interessierten Leser sei auf die medizinische Fachliteratur verwiesen, insbesondere auf Louis und Goldstein (1983), Wilson (1983) sowie Putz und Pabst (2000).

2.1 Vereinfachte geometrische Darstellung

In diesem Abschnitt werden Methoden zur Darstellung und Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie erläutert, denen vereinfachte geometrische Objekte zugrundeliegen. Gemeinsames Merkmal der hier erwähnten Methoden ist die geringe Anzahl von Freiheitsgraden gegenüber einer detaillierten anatomischen Beschreibung der Wirbelsäule.

2.1.1 Cobb-Winkel und Fergusonmethode

Die Cobb-Winkel-Methode, siehe Cobb (1948) und Keessen u. a. (1994), und die Ferguson-Methode, siehe Ferguson (1930), sind die frühesten Verfahren zur Darstellung der Wirbelsäulenlinie, auf die hier eingegangen wird. Sie sollen exemplarisch für eine Reihe von Indizes für die klinische Evaluation von bestimmten Erkrankungen der Wirbelsäule stehen - hier: Skoliose, Hyperlordose und Hyperkyphose - die mit einer abnormen Krümmung der Wirbelsäule einhergehen. Diese Indizes basieren auf wenigen oder sogar einzelnen Winkeln oder Krümmungsradien, in der Regel gemessen in radiologischen Aufnahmen in einer klinischen Ebene. Für eine Übersicht über die weiteren gebräuchlichen „einfachen“ Indizes sei auf den Übersichtsartikel Vrtovec u. a. (2009) verwiesen.

Bei der Cobb-Winkel-Methode zur klinischen Einschätzung von Skoliose wird in einem frontalen Röntgenbild des einzuschätzenden Segments der Wirbelsäule von Hand die superiore Tangente am Wirbelkörper des superioren Endwirbels sowie die inferiore Tangente

am inferioren Endwirbel dieses Segments bestimmt. Der Cobb-Winkel ist dann definiert als der Winkel zwischen diesen beiden Geraden. Bei der Ferguson-Methode werden, ebenfalls von Hand, in einem frontalen Röntgenbild, die Zentren der Wirbelkörper des superioren Endwirbels, des zentralen Wirbels und des inferioren Endwirbels des zu begutachtenden Segments der Wirbelsäule bestimmt. Der Ferguson-Winkel ist dann definiert als der Winkel zwischen den Verbindungslinien inferior-zentral und zentral-superior. In der Regel bilden Wendepunkte der Projektion der Wirbelsäule auf die Frontalebene die Anfangs- und Endpunkte der Segmente zur Einschätzung der Skoliose, die sogenannten Wendewirbel. Ein entsprechendes Konzept wird Bestimmung zur von Lordose und Kyphose benutzt, siehe Drerup und Hierholzer (1986) und Drerup u. a. (1997). Bei der Cobb-Winkel-Methode zur klinischen Einschätzung von Skoliose wird in einem frontalen Röntgenbild des einzuschätzenden Segments der Wirbelsäule von Hand die superiore Tangente am Wirbelkörper des superioren Endwirbels sowie die inferiore Tangente am inferioren Endwirbel dieses Segments bestimmt. Der Cobb-Winkel ist dann definiert als der Winkel zwischen diesen beiden Geraden. Bei der Ferguson-Methode werden, ebenfalls von Hand, in einem frontalen Röntgenbild, die Zentren der Wirbelkörper des superioren Endwirbels, des zentralen Wirbels und des inferioren Endwirbels des zu begutachtenden Segments der Wirbelsäule bestimmt. Der Ferguson-Winkel ist dann definiert als der Winkel zwischen den Verbindungslinien inferior-zentral und zentral-superior. In der Regel bilden Wendepunkte der Projektion der Wirbelsäule auf die Frontalebene die Anfangs- und Endpunkte der Segmente zur Einschätzung der Skoliose, die sogenannten Wendewirbel. Ein entsprechendes Konzept wird Bestimmung zur von Lordose und Kyphose benutzt, siehe Drerup und Hierholzer (1986) und Drerup u. a. (1997).

Für die Cobb-Methode und die modifizierte Cobb-Methode gibt es eine Reihe von Arbeiten zur semiautomatischen und vollautomatischen Bestimmung aus radiologischen Aufnahmen, siehe beispielsweise Dutton u. a. (1989), Shea u. a. (1998) und Chockalingam u. a. (2002). In diesen Quellen wird eine hervorragende Reliabilität der automatischen Bestimmung und eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der manuellen Methode angegeben.

2.1.2 Verbundene Segmente

Unter der Darstellung der Wirbelsäule durch verbundene Segmente versteht man heute im engeren Sinne die Herangehensweise von Arbeiten wie Crosbie u. a. (1997), Syczewska u. a. (1999) und Frigo u. a. (2003), bei denen reflektierende Marker auf die Haut über den hinteren Wirbelfortsätzen an ausgewählten Wirbeln aufgebracht werden. Diese werden dann durch Stereophotogrammetrie, siehe Cappozzo u. a. (2005), oder Videokameras erfasst und rechnergestützt ausgewertet. Die vereinfachte Darstellung der Wirbelsäule ergibt sich dann durch

die Verbindungslinien der gemessenen Positionen dieser Hautmarker als zwei- oder dreidimensionale stückweise lineare stetige Kurven. Dieses Konzept kann bis zu Gregersen und Lucas (1967), Thurston und Harris (1983) und Pearcy u. a. (1987) zurückverfolgt werden. Verbundene Segmente in Verbindung mit Stereophotogrammetrie sind für die Begutachtung von allgemeinen Bewegungen des Oberkörpers, wie z.B. in Lee u. a. (2009) dargelegt, von Interesse. Die stereophotogrammetrische Methode an sich, in Verbindung mit verschiedenen biomechanischen Modellen, stellt laut Don u. a. (2012) eine Art goldener Standard für die nichtinvasive Bewegungsmessung dar. Bisweilen steht dabei die Wirbelsäulenrekonstruktion per se für die Darstellung der Dynamik des gesamten Oberkörpers, oder zumindest ist sie eine zentrale Aufgabe darin, wie man dem Übersichts- und Vergleichsartikel Leardini u. a. (2009) entnehmen kann.

Der Ansatz der verbundenen Segmente wurde auf Modelle mit mindestens drei Markern oder Markertriaden pro Segment verallgemeinert, siehe Konz u. a. (2006), Preuss und Popovic (2010) und Morgenroth u. a. (2010), um auch die Rotation der Segmente um ihre longitudinale Achse erfassen zu können. Dabei wird nicht mehr davon ausgegangen, dass die Segmente an den Markerpositionen gelenkig verbunden sind, sondern es werden Gelenkszentren auf Basis von anatomischen Gegebenheiten und der kinematischen Analyse der Markerbewegungen bestimmt. Insbesondere ist der Ansatz von Konz u. a. (2006) herauszustellen, der eine zusätzliche starre Verbindung der Markerpositionen zur vermuteten optimalen Lage der Segmente innerhalb der Wirbelkörper bzw. Bandscheiben vorsieht.

Eine Alternative zur optischen Messung von Hautmarkern stellt die Verwendung von mechanischen Messeinrichtungen wie Goniometern, siehe Dopf u. a. (1994) und Needham u. a. (2012), Trägheitssensoren, siehe Goodvin u. a. (2006) und Wong und Wong (2008), oder anders ortbaren Sensoren wie in Yang u. a. (2008) dar. Ein Vorteil insbesondere der Trägheitssensoren ist dabei, dass diese Sensoren nicht frei sichtbar sein müssen und sich z.B. für Langzeitmessungen unter der Kleidung eignen. Allen diesen Messungen durch auf die Haut aufgebrachten Sensoren oder Markern ist jedoch gemein, dass nicht direkt die Position oder Bewegung der Wirbelsäule gemessen wird, sondern das auch Relativbewegungen der zwischen Wirbelsäule und Markern/Sensoren befindlichen Haut und Weichteilen zur Wirbelsäule mit in die Messung eingehen. In ihrer aktuellen Übersichtsarbeit zum Stand der Technik der instrumentellen Messung der Wirbelsäulenfunktion, Don u. a. (2012), kommen die Autoren zu dem Ergebnis, dass dieses „Problem der Hautartefakte“ die bedeutsamste Störgröße für die oben genannten Formen der nichtinvasiven Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie darstellt. In derselben Arbeit treffen die Autoren die Aussage, dass Modelle, die auf wenigen verbundenen Segmenten basieren, eine starke Vereinfachung vornehmen. Bewegungen innerhalb des durch ein Segment definierten Abschnitt würden nicht berücksichtigt.

Die Autoren geben daher den Wunsch an, Modelle mit flexiblen Segmenten zu entwickeln, oder die Wirbelsäule in Gänze als deformierbaren Körper zu modellieren.

2.1.3 Kurvenbasierte Modelle

Unter kurvenbasierten Modellen wird in diesem Abschnitt der Ansatz verstanden, die Wirbelsäule als ganzes oder in Teilen als glattes Kurvenstück, siehe auch Kapitel 3 darzustellen. Als einen ersten Ansatz in dieser Richtung kann man die Modellierung der Wirbelsäule als Bogen bzw. Bogengewölbe wie in Aspdén (1989) verstehen. In dieser Arbeit wird ein generischer Bogen als Modell für die Wirbelsäule eingeführt, um Lasten insbesondere im unteren Lumbarebereich als Reaktionskräfte vorhersagen zu können. Diese Arbeit wird häufig in der Sekundärliteratur als erster Ansatz zur Modellierung der globalen Wirbelsäulenfunktionen angesehen, im Gegensatz zu Modellen, die nur ein einzelnes Segment wie den Lumbarebereich oder Zervikalbereich betrachten, siehe Vrtovec u. a. (2009) und Don u. a. (2012). Die Modellierung der Wirbelsäule als elastischer Stab geht bis auf Hess und Lombard (1958) und Terry und Roberts (1968) zurück und wurde kürzlich von Lotz u. a. (2012) und O'Reilly und Peters (2011) fortgeführt. Das Konzept der Wirbelsäule als Kontinuum kann als ein geometrisches Verfahren verstanden werden, die Wirbelsäule als Kurve aufzufassen.

Eine konsistente, vollständige Methodik zur Beschreibung der gesamten Wirbelsäule als geometrische Kurve findet sich in Stokes (1994). Dieser Artikel greift verschiedene frühere Konzepte zur Beschreibung der Geometrie der Wirbelsäule auf und ordnet sie in ein Gesamtkonzept, das auf die Beschreibung abnormer Krümmungen der Wirbelsäule zugeschnitten ist. Zentrales Objekt ist die Wirbelkörperlinie, eine Kurve, die die Zentren der Wirbelkörper verbindet. Zur Beschreibung dieser Kurve werden dort die Euklidische Krümmung und die Frenet'sche Torsion, siehe Kapitel 3, empfohlen. Die für die Cobb-Winkel-Methode und Ferguson-Methode entscheidenden Wendewirbel werden ebenfalls auf Basis dieser Kurve definiert. Der Artikel unterscheidet dazu zwischen der allgemeinen und der analytisch automatisierten Cobb-Winkel-Methode bzw. Ferguson-Methode. Der Artikel beinhaltet auch eine Definition von globalen und lokalen Referenzsystemen auf Basis der Anatomie der Wirbelsäule und darauf basierende weitergehende Definitionen der globalen und lokalen klinischen Ebenen, sowie von Ebenen, die den Autoren zur Beschreibung der globalen Krümmung und Ausrichtung der Wirbelsäule als am besten geeignet erscheinen. Dieses sind die Ebene der besten Schmiegun und die Ebene der maximalen Krümmung. Der Ansatz, kurvenbasierte Modelle auf Basis von optimal schmiegnenden Ebenen zu analysieren wird in Berthonnaud u. a. (2012) weiterentwickelt.

Alternative Bezugskurven bzw. Linien in Röntgenaufnahmen sind die posteriore Wirbelkörperlinie, Daffner u. a. (1987), die entlang der hinteren Wirbelmauer verläuft, sowie die anteriore Wirbelkörperlinie, Denis (1983), entsprechend entlang der vorderen Wirbelmauer. Sie werden insbesondere für die Diagnose von Brüchen der Wirbelsäule und ihrer Ätiologie begutachtet. Eine weitere Referenzkurve ist durch die Spitzen der hinteren Fortsätze der Wirbelkörper gegeben, die Spinale-Fortsätze-Linie, siehe Turner-Smith u. a. (1988). Sie spielt in der Rekonstruktion der Wirbelsäulenkonformation aus Rasterstereographie, siehe unten, eine zentrale Rolle.

Kurvenbasierte Modelle wurden vielfach aus bildgebenden Verfahren wie Computertomographie (CT), Magnetresonanztomographie (MRT), oder Röntgenaufnahmen rekonstruiert. Die Autoren Harrison u. a. (1998) geben eine Methode an, eine Ellipse an die Röntgenaufnahme der Lumbalordose individueller Patienten und Probanden anzupassen. Sie zeigen, dass diese Form - in diesem Fall die expliziten Parameter der beiden Radien der Ellipsen - genauer zwischen Patienten mit chronischen Rückenschmerzen im Lendenwirbelbereich und asymptomatischen Probanden unterscheiden kann, als die modifizierte Cobb-Methode und Ferguson-Methode. Entsprechende Ergebnisse geben Harrison u. a. (2004) für die Halswirbelsäule, auf Basis von Kreis- und Ellipsenanpassung an. In Vrtovec u. a. (2008) werden polynomielle Raumkurven vierter und fünfter Ordnung mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate, siehe Björck (1996), an von Hand aus CT-Bildern bestimmten anatomischen Orientierungspunkten angepasst. In der Arbeit Hay u. a. (2009) wird gezeigt, dass diese Methode, angewendet auf den Wirbelkanal und verbunden mit einer Analyse der euklidischen Krümmung und Frenet'schen Torsion der ermittelten Kurve, zwischen asymptomatischen Testpersonen und Patienten mit Schmerzen im Lumbalbereich unterscheiden kann.

Ebenso wurden Splinekurven zur Darstellung der Wirbelsäulenlinie erforscht. So wurden beispielsweise B-Splinekurven, siehe Kapitel 3.2, zur Evaluierung der Skoliose an biplanare Röntgenaufnahmen angepasst, siehe Berthonnaud und Dimnet (2007). Die Möglichkeit, eine Splinekurve an sagittale Aufnahmen anzupassen wird in Yang u. a. (2007) beschrieben. Um den Übergang solcher Kurvenmodelle auf Bewegungsmessungen zu untersuchen, haben die Autoren Ranavolo u. a. (2012) eine Korrelationsanalyse durchgeführt, zwischen polynomiellen Kurven, die an Hautmarkerpositionen angepasst wurden und Kurven, die an Referenzpunkten innerhalb der Wirbelsäule angepasst wurden. Diese Referenzpunkte wurden in Röntgenaufnahmen von Hand bestimmt. Die Autoren kommen zu dem Schluß, dass polynomielle Kurven fünfter Ordnung eine ausreichende Korrelation zwischen Hautmarkerpositionen und Kurvenanpassung an die Röntgenaufnahmen garantieren, wobei sich diese Analyse auf die Sagittalebene beschränkt. Bereits Bryant u. a. (1989) haben eine Methode vorgeschlagen, die die Position der Wirbelkörper in der Sagittalebene aus videographisch

erfassten Hautmarkerpositionen auf Basis kubischer Splinekurven schätzt. Diese Autoren nehmen eine konstante Differenzkurve zwischen der Zielkurve und einer kubischen Splineinterpolation der Hautmarkerpositionen an, die ebenfalls als kubische Splinekurve dargestellt wird. Ein Ansatz, diese sogenannte Relation zwischen Hautoberflächenkurve und Wirbelsäulenkurve in der Sagittalen patientenspezifisch auszuwerten, wurde in Berthonnaud u. a. (2010) angegeben. Die Verallgemeinerung einer solchen Methode auf Raumkurven, um die Lage der Wirbelsäule dreidimensional in der Bewegung aus gemessenen Hautmarkerpositionen zu schätzen, steht noch aus. Ebenso wurden B-Splinekurven mit wenigen Segmenten als Möglichkeit beschrieben, das Schwingungsverhalten der Wirbelsäule unter Erregung zu modellieren, wie sie beim Führen eines Kraftfahrzeugs oder Flugzeug durch den Sitz auf den Körper auftritt, siehe Valentini (2012). Dieser Ansatz verleiht Splinekurven elastische Eigenschaften und behaftet sie mit Massepunkten, die sogenannten D-Splines, um Bewegungsgleichungen für Splinekurven aufzustellen, siehe auch Qin und Terzopoulos (1996) und Theetten u. a. (2008). In der zitierten Arbeit von Valentini beschränkt sich die kinematische Analyse dabei ebenfalls auf Bewegung in der Sagittalebene, wiewohl der Autor angibt, dass sich das Prinzip auch auf allgemeine dreidimensionale Bewegungen anwenden lässt.

Eine weitere Methode ist die Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie mittels Rasterstereographie, siehe Frobin und Hierholzer (1983) und Drerup und Hierholzer (1994). Dazu wird die Topographie des Rückens einer Zielperson über die Projektion eines Streifenmusters mittels zwei Kameras bestimmt. In der oben zitierten Version dieser Methode ist die Wirbelsäulenlinie durch die Folge der Positionen der hinteren Dornenfortsätze gegeben. Am angegebenen Ort wird auch eine Methode angegeben, die Rotation der Wirbel aus der Topographie des Rückens zu rekonstruieren. Die Methode wurde speziell für die Begutachtung der Skoliose entworfen, siehe auch Hierholzer und Hackenberg (2002). Um eine kompaktere mathematische Darstellung als durch eine Punktefolge zu haben, wurden verschiedene Kurvenmodelle an die ermittelten Positionen der Dornfortsätze angepasst. Zu erwähnen sind insbesondere sinusoidale Kurven, Drerup und Hierholzer (1996), und polynomielle Kurven, siehe beispielsweise Berryman u. a. (2008). Erst kürzlich wurde gezeigt, dass auch dynamische Messungen von anatomischen Orientierungspunkten mithilfe der Rasterstereographie möglich sind, siehe Betsch u. a. (2013), mit vergleichbarer Präzision wie bei Stereophotogrammetrie. Allerdings ist die Position der Zielperson und ihre Haltung in diesem Verfahren auf einen kleinen Ort beschränkt.

Zusammenfassend kann man sagen, dass vereinfachte geometrische Modelle der Wirbelsäule mit dem Ziel entwickelt werden, eine kompakte und abstrakte mathematische Beschreibung der anatomisch komplexen menschlichen Wirbelsäule zu erlangen, die wesentliche Eigenschaften der Wirbelsäule in Funktion und Eigenart - möglichst korrekt - wiedergibt. Sie

kommen vor allem zum Einsatz, um globale anatomische oder kinematische Eigenschaften der Wirbelsäule und ihrer Funktion makroskopisch zu untersuchen. Das Bestreben ist dabei häufig, diese Eigenschaften in einer einzelnen Zahl, als klinischen oder biomechanischen Index, zu komprimieren. Die vereinfachten geometrischen Darstellungen sind dabei die frühesten hier angegebenen Methoden.

2.2 Mehrkörpermodelle der Wirbelsäule

Unter einer Mehrkörperformulierung der Wirbelsäule wird in diesem Abschnitt der Ansatz verstanden, einzelne Wirbelkörper als Starrkörper zu modellieren, sowie die Angabe einer kinematischen Beziehung für Relativbewegungen der Wirbelkörper zueinander. Diese kinematische Beziehung wird als Modell für die Funktion sowohl der Bandscheiben und Facetengelenke, über die die Wirbelkörper artikuliert sind, als auch der umgebenden Ligamente und Muskeln, siehe White und Panjabi (1990), verstanden. Dabei können sich Mehrkörpermodelle auf sämtliche sieben Halswirbel (Abk. C1-C7), zwölf Brustwirbel (Th1-Th12), fünf Lendenwirbel (L1-L5), Kreuzbein mit fünf verschmolzenen sakralen Wirbeln (S1-S5) und bis zu fünf kokzygeale Wirbel (Co1-Co3, Co4, Co5) erstrecken, oder sich auf wenige Bewegungssegmente beschränken. Erste Ansätze finden sich in den Arbeiten Panjabi und White III (1971), Panjabi (1973) und Schultz und Galante (1970) auf Basis mechanischer Beschreibungselemente wie Feder/Dämpfereinheiten oder anderen elastischen Körpern.

Die einfachste in der Literatur beschriebene Annahme für die Relativbewegung zwischen zwei Wirbeln ist die Realisierung der Kinematik als Kugelgelenk wie in De Zee u. a. (2007), ein Ansatz, der bis auf Putz (1981) zurückgeht. Das Modell umfasst neben der Formulierung der Wirbel als generische Körper auch Modelle einzelner Muskelgruppen, wahlweise als einfache lineare Elemente, Elemente mit Zwischenpunkten oder umhüllte Elemente aus mehreren Fasern. Dieses Streben, die *funktionelle Anatomie* der Wirbelsäule und mit ihr verbundene Einheiten wie Muskelgruppen und Ligamente möglichst getreu abzubilden, ist charakteristisch für moderne Mehrkörperformulierungen, siehe z.B. Han u. a. (2012).

Die Realisierung der Artikulation zweier angrenzender Wirbel durch die Bandscheibe zwischen ihnen als Kugelgelenk, die sogenannte funktionelle Wirbelsäuleneinheit (*functional spine unit*, FSU), ist seit der Anfangszeit der Mehrkörpermodelle für die Wirbelsäule recht populär, siehe z.B. Percy und Bogduk (1988). Sie wurde jedoch schon früh kritisiert in Hinblick auf unrealistische Eigenschaften der angenommenen Kinematik. So geben Stokes und Gardner-Morse (1995) an, dass eine Realisierung der Artikulation als homogener Balken eingeprägte Kräfte mit einem Ansatz der inversen Dynamik bis zu dreifach genauer vorher-

sagt, als eine Geometrie, die auf Kugelgelenken basiert. Ebenfalls deuten Erfahrungen mit Bandscheibenprothesen wie in García Vacas u. a. (2014) auf ein nicht physiologiemäßiges Verhalten von Kugelgelenken zur Darstellung der Kinematik einer FSU hin. Dem entgegen geben De Zee u. a. (2007) eine gute qualitative Übereinstimmung der durch das Modell geschätzten maximalen Extensionsmomente im Bereich L5/S1 für eine Gleichgewichtskonfiguration mit vorher veröffentlichten experimentellen Studien an, siehe Hansen u. a. (2006). Die Autoren erwähnen auch eine große Diskrepanz dieser maximalen Momente zwischen verschiedenen Studien. Die Frage nach der Validität des Ansatzes über Kugelgelenke kann also umstritten genannt werden.

Die Internationale Gesellschaft für Biomechanik (ISB) empfiehlt in einem Grundsatzpapier, siehe Wu u. a. (2002), die Relativbewegung zwischen Wirbelkörpern einer FSU zur Bewegungsanalyse in sechs Freiheitsgraden einer allgemeinen Festkörpertransformation zu betrachten. Sie beruft sich dabei auf die Arbeit von Panjabi u. a. (1976), in der die Relation zwischen äusseren Kräften/Momenten und Translation/Rotation eines Wirbels durch eine 6×6 -dimensionale, symmetrische Steifigkeitsmatrix dargestellt wird. Dieser Ansatz wurde vielfach weiter untersucht, siehe beispielsweise Stokes u. a. (2002), Gardner-Morse und Stokes (2003) sowie Stokes und Gardner-Morse (2003). Ein wichtiges Konzept ist der Begriff der neutralen Zone (NZ), ein Bereich - als Gebiet für die Gelenkkoordinaten - in dem eine homogene Steifigkeit für die FSU angenommen werden kann, siehe White und Panjabi (1990). Das Gebiet außerhalb der neutralen Zone bis zum Anschlag wird elastische Zone (EZ) genannt. Die Autoren Christophy u. a. (2012) vereinfachen dieses Prinzip zu einer Bewegungsparametrisierung einer FSU mit drei Freiheitsgraden durch feste, lineare Kopplungen zwischen Rotation und Translation und stellen ein generisches Modell in der Mehrkörpersimulationssoftware OpenSim, siehe Seth u. a. (2011), zur Verfügung. Der Thoraxbereich wird dabei als einzelner Starrkörper behandelt. Die Autoren rechtfertigen dies in den oben angegebenen Quellen durch die große beobachtete Steifigkeit in diesem Bereich. Dieses Prinzip der strikten Kopplung zwischen Rotation und Translation, findet sich auch in Morais u. a. (2012). Die Autoren Abouhossein u. a. (2011) modellieren die Moment-Rotationsbeziehung als allgemeinere Steifigkeitsfunktion, realisiert durch Splinefunktionen.

Die Reduktion der Freiheitsgrade von Relativbewegungen einer FSU ist insbesondere dann von Interesse, wenn die Konfiguration der Wirbelsäule auf Basis eines Mehrkörpermodells aus instrumentellen Messungen wie der stereophotogrammetrischen Bestimmung von Hautmarkerpositionen rekonstruiert wird. Bei sechs zugrundeliegenden Freiheitsgraden je Wirbel wäre die Messung von drei Hautmarkern pro Wirbel in allgemeiner Lage nötig, siehe Panjabi u. a. (1981). Eine vollständige Vermarkierung der Wirbelsäule ist aus Platzgründen z.B. im Zervikalbereich nicht möglich, vgl. Roozmon u. a. (1993), während für den Lumbarebereich

einige Arbeiten existieren, siehe Cerveri u. a. (2004a) und Mörl u. a. (2005). Ein weiteres Problem besteht darin, dass sich die posterioren Wirbelfortsätze zwar gut für die Markerplatzierung eignen, da sie gut palpierbar sind und die Position von auf ihnen platzierten Markern am wenigsten durch Hautbewegungen beeinflusst zu sein scheint. Dies gilt jedoch nicht für die seitlichen Fortsätze oder andere Orientierungspunkte, siehe Labesse u. a. (1996), Zhang und Xiong (2003) und Cerveri u. a. (2004b).

Wie wiederum Don u. a. (2012) anführen, ist aus Sicht der klinischen Praxis eine Methode, mit möglichst wenig Hautmarkern auszukommen, erstrebenswert, da das Aufbringen der Marker zeit- und damit auch kostenintensiv ist. Die Autoren Simonidis u. a. (2007) und Simonidis und Seemann (2009) schlagen zur Reduzierung der Freiheitsgrade und damit der benötigten Marker für eine Bestimmung eines Mehrkörpermodells für die Wirbelsäule eine Kinematik mit drei Freiheitsgraden pro Wirbel auf Basis eines Kugel- bzw. Ellipsoidgelenks vor. Zusätzlich geben die Autoren eine lineare Beziehung zwischen den Gelenkkoordinaten der Wirbel, hergeleitet aus dem Verhältnis der Bewegungsspielräume der FSU zueinander. In der späteren Arbeit schlagen die Autoren ein Optimierungsverfahren auf Basis eines minimalen Energieaufwandes zur Reduzierung von Modellungenauigkeiten und Hautartefakten vor, geben jedoch keine Validierung an. Die Autoren Ma u. a. (2008) schlagen ein statistisches Verfahren auf Basis eines Bayes'schen Schätzernetzwerks vor, um aus der Position von vier Hautsensoren auf die Position der Zentren und den Winkel in der Sagittalen der fünf lumbaren Wirbel zu schließen. Sie geben eine hohe Pearson-Korrelation von 0,99 zwischen vorhergesagten und radiologisch gemessener Bewegung an, sowie einen mittleren Fehler in Rotation von $-1,45^\circ$. Eine Verallgemeinerung dieser Methode auf ein dreidimensionales Modell steht jedoch noch aus.

Die Korrelation von Modellen, die auf vollständige Platzierung von Hautmarkern im Lumbarebereich beruhen, mit fluoroskopischen in-vivo Messungen der Gelenkwinkel wurde kürzlich von Hashemirad u. a. (2012) mit ca. 0.7 – 0.91 erklärter Varianz angegeben. Dies bedeutet umgekehrt, dass bis zu 30% der von Hautmarkern geschätzten Bewegung auf Hautartefakten beruhen. Diese Autoren geben eine lineare Beziehung zwischen Hautmarker-Bewegungen und Winkeln zwischen den Wirbeln an und bestätigen damit die Arbeiten von Cerveri u. a. (2004b) und Mörl und Blickhan (2006). Die Reduktion dieser Hautartefakte mittels expliziter Modelle, statistischer Methoden oder Filtern wie Kalman-Filtern steht vor einer Reihe von Problemen, die bislang ungelöst sind, siehe z.B. Leardini u. a. (2005) und Wolf und Senesh (2011). Dies unterstreicht die Notwendigkeit, weitere Methoden zur Hautartefakt-Reduktion zu erforschen.

Die Rekonstruktion von Mehrkörpermodellen aus bildgebenden Verfahren wie biplanaren

Röntgenaufnahmen, siehe Boisvert u. a. (2008) und Moura u. a. (2011), ist ein weit erforschtes Gebiet, da sie eine hohe Messgenauigkeit mit relativ niedrigen Kosten verbindet. Das hohe Maß an Informationen, die aus solchen Bildern extrahiert werden können, erlaubt es, grundsätzlich sechs Freiheitsgrade der Bewegung zwischen den beiden Wirbeln einer FSU zu betrachten. Die oben erwähnten Arbeiten verwenden verschiedene Metriken für die Bewertung von Festkörpertransformationen um eine wahrscheinliche Konfiguration des sogenannten artikulierten Modells zu erhalten. Herauszuheben ist die Arbeit Moura u. a. (2009), die in einem Zwischenschritt Splinekurven als kurvenbasiertes Modell für die Wirbelsäule bestimmt, um dann eine wahrscheinliche Konfiguration für das allgemeine Mehrkörpermodell der Wirbelsäule aus dieser Kurve zu schätzen. Dies schlägt eine direkte Brücke von den im letzten Abschnitt beschriebenen vereinfachten geometrischen Modellen zu detaillierten Mehrkörpermodellen.

Die Segmentierung von MRT- und CT-Bildern zur Identifizierung von Wirbelkörpern und der übrigen funktionellen Einheiten der Wirbelsäule stellt auch eine Art Mehrkörpermodell dar. In der Arbeit Juchem u. a. (2007) wird aus solchen segmentierten Bildern ein Mehrkörpermodell für die Wirbelsäule abgeleitet. Die Autoren Gill u. a. (2012) benutzen segmentierte CT Bilder und ein Mehrkörpermodell auf Basis des oben beschriebenen Steifigkeitsansatz von Panjabi u. a. (1976), um die Registrierung von Ultraschallmessung zu CT zu realisieren.

Die Rekonstruktion von Mehrkörpermodellen oder zumindest kinematischen Informationen aus 2D-Videofluoroskopie, siehe Breen u. a. (1989), wurde schon früh beschrieben und stetig weiterentwickelt. Sie wurde auch mit dreidimensionalen radiologischen Messungen wie CT kombiniert, siehe Cholewicki u. a. (1991), Zheng u. a. (2003) und Lam u. a. (2009). Ein Vorteil dieser Methodik liegt darin, dass sie dynamische Informationen liefert und hinreichend genau ist. Die Videofluoroskopie gilt wegen der geringen verwendeten Strahlendosis als nichtinvasiv. Herausforderung der aktuellen Forschung ist dabei die Rekonstruktion von dreidimensionalen Informationen aus der zweidimensionalen Messung. Die Autoren Zhang u. a. (2013) schlagen darüberhinaus eine biplanare, dynamische Röntgenographie zur räumlichen Analyse vor. Diese Entwicklung ist in einem sehr frühen Stadium, so dass an dieser Stelle keine kritische Würdigung dieser Methode vollzogen werden soll.

Zusammenfassend stellen Mehrkörperformulierungen einen Kompromiss zwischen einer kompakten Darstellung der Wirbelsäule und der umgebenden anatomischen Strukturen und einer möglichst detailgetreuen Abbildung der Wirbelsäule und ihrer Funktion dar. Dieser Kompromiss erlaubt eine tiefergehende Analyse dieser Funktion und möglicher pathologischer Abweichungen mit relativ geringem Rechenaufwand in Abgrenzung zur Darstellung mit der höchsten Anzahl an Freiheitsgraden die in diesem Kapitel beschrieben werden soll.

Ein anerkannter Goldstandard existiert derzeit in diesem Zusammenhang noch nicht.

2.3 Darstellungen auf Basis der Finite Elemente Methode

Die Finite Elemente Methode (FEM), siehe z.B. Zienkiewicz (1975), Zienkiewicz und Taylor (2000) und Bathe (2002), ist eine numerische Methode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen und Variationsproblemen in der Kontinuumsmechanik. Charakteristisch für sie ist die Vereinfachung von mathematischen Beschreibungen von Materialeigenschaften durch sogenannte Ansatzfunktionen bzw. Formfunktionen mit endlich vielen - a priori unbekannten und daher zu schätzenden - Parametern. Intuitiv kann man die finiten Elemente als Diskretisierung der Kontinua begreifen in kleine, homogene „Bausteine“, mit denen komplexe Einheiten aufgebaut werden können. Erste Anwendungen dieser Methode auf ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen gab es in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts in der Strukturanalyse von Baugruppen im Flugzeugbau, siehe z.B. Turner u. a. (1956). Die erste Anwendung auf biomechanische Probleme geben Brekelmans u. a. (1972) mit der Analyse von Materialeigenschaften einzelner menschlicher Skeletteile an.

Für die Anwendung auf die Modellierung der Wirbelsäule und ihrer Funktion ist die Abgrenzung zu Mehrkörperformulierungen fließend. So geben Fagan u. a. (2002) in ihrem Übersichtsartikel zu FEM in der Wirbelsäulenanalyse viele der im letzten Abschnitt erwähnten Mehrkörpermodelle als Beispiele für sogenannte „einfache Modelle der kompletten Wirbelsäule“ an. Tatsächlich erfüllt eine Modellierung der Wirbelsäule durch Starrkörper und Federelemente wie in Aquino (1970) die formalen Kriterien für eine FEM-Anwendung. Prinzipiell ist auch die Modellierung der Wirbelsäule als D-Splines wie in Valentini (2012) eine Beschreibung durch Formfunktionen in der Form der Basis-Splines. Daher wird in diesem Abschnitt ein FEM-Ansatz dadurch charakterisiert verstanden, dass eine möglichst große Anzahl an Freiheitsgraden und Detailtreue eingeschlossen ist. Als Referenz für dieses Maß an Detailtreue sei die Arbeit von Belytschko u. a. (1974) genannt, in der eine einzelne FSU mit einer axialsymmetrischen und horizontalsymmetrischen FEM-Formulierung zur Analyse von Belastungszuständen einer Bandscheibe modelliert wird. Sie zeichnet sich durch das Bestreben aus, gerade soviel Details in das Modell einzuschließen, dass die Analyse einzelner Belastungszustände gerade noch in vertretbarer Zeit mit der zur Verfügung stehenden Hardware ausgeführt werden kann. Diese Arbeit kann als erste Anwendung des FEM-Ansatzes in der Wirbelsäulenmodellierung betrachtet werden.

Entsprechend der Entwicklung der Rechenkapazität moderner Computeranlagen stieg die Anzahl an Details, die in akzeptabler Zeit analysiert werden kann, stark an. Dementspre-

chend entwickelten sich die FEM-Modelle einzelner FSU mit starkem Fokus auf der Modellierung der Bandscheiben im Lumbarebereich stetig fort. Hier seien die Arbeiten von Shirazi-Adl u. a. (1984), Shirazi-Adl u. a. (1986), Goel u. a. (1995) und Polikeit u. a. (2003) exemplarisch genannt. Ausgehend von solchen Modellen einzelner FSU wurden komplexere Modelle ganzer Bewegungseinheiten entwickelt, wie in dem Lumbarebereich, siehe z.B. Breau u. a. (1991), Eberlein u. a. (2004) und Shirazi-Adl (2006), dem Zervikalbereich, siehe z.B. Kleinberger (1993), Kumaresan u. a. (1999) und Greaves u. a. (2008), oder den Lumbar- und Thoraxbereich zusammen, siehe z.B. Shirazi-Adl und Parnianpour (2000) und Liebschner u. a. (2003). Die oben genannten FEM-Modelle wurden dabei entweder aus dreidimensionalen Messungen an Kadavern mit Laserscannern oder aus bildgebenden Untersuchungen wie MRT oder CT konvertiert und dienen als „generische“ Modelle.

Wegen der Ausrichtung der FEM an Materialeigenschaften und Kontaktkräften sind die Anwendungen der FEM-Analyse auf die Biomechanik typischerweise durch Darstellung der Wechselwirkung zwischen Konfiguration bzw. Bewegungen einzelner Segmente und der Analyse der Lasten in den anatomischen Einheiten der Wirbelsäule gekennzeichnet. Häufig ergänzen dabei FEM-Simulationen experimentelle Daten oder dienen deren Bestätigung. Dies entspricht in Abgrenzung zu dem in dieser Arbeit verfolgten Ziel der makroskopischen Wiedergabe der Wirbelsäule aufgrund weniger Messpunkte einer alternativen Vorgehensweise, in der die makroskopische Bewegung der Wirbelsäule als Ergebnis der Lösung infinitesimaler Zusammenhänge gewonnen wird. Da diese Ansätze ein eigenständiges Forschungsgebiet mit vielen relevanten Beiträgen in der Literatur darstellen, beschränkt sich dieser Abschnitt im weiteren auf die Benennung einiger wichtigen Anwendungen der FEM im Zusammenhang mit der menschlichen Wirbelsäule.

Beispielhaft sind hier (1) Folgen von chirurgischen Eingriffen wie Fixierung einzelner FSUs, siehe Chen u. a. (2001), Kovalenko u. a. (2011) und Chen u. a. (2012), oder Bandscheiben-Prothetik, siehe z.B. Dooris u. a. (2001), Rohlmann u. a. (2005), und Womack u. a. (2011); (2) allgemeine Instrumentierung der Wirbelsäule, siehe z.B. Goel u. a. (1988); (3) Analyse pathologischer Veränderungen wie Osteoporose und Folgen derer Behandlung, siehe z.B. Polikeit u. a. (2003) und Villarraga u. a. (2005), sowie (4) Veränderungen der Bandscheiben, die zu Versagen oder Bandscheibenvorfällen führen können, siehe z.B. Lu u. a. (1996) und Schmidt u. a. (2007).

Ein mittelfristige Ziel der FEM-Modellierung der Wirbelsäule ist, in-vivo Messungen zu ersetzen, um die mit ihnen einhergehenden Komplikationen zu vermeiden. Langfristig besteht die Aussicht, patientenspezifische FEM-Modelle abzuleiten, um chirurgische Eingriffe anzuzeigen, zu planen und ihre Folgen vorherzusagen, vgl. Fagan u. a. (2002).

2.4 Zielsetzung der Arbeit

Ziel ist die Rekonstruktion der Wirbelsäulenlage bzw. -bewegung aus stereophotogrammetrisch gemessenen Positionen von Hautmarkern. Während sich in der Literatur Ansätze finden, ein detailliertes Mehrkörpermodell mit vielen Freiheitsgraden aus vielen Markerpositionen zu rekonstruieren, soll hier ein Modell mit einer reduzierten Anzahl an Freiheitsgraden erstellt werden, das mit einer geringeren Anzahl an Hautmarkern geschätzt werden kann. Ausgangspunkt dieses Ansatz ist, dass die Nutzung vieler Marker für ein Mehrkörpermodell nicht per se zu einer genaueren Schätzung der Wirbelsäulenlage zu führen muss, da aufgrund des Problems der Hautartefakte eine Verfälschung der Messergebnisse für die einzelnen Wirbelkörper vorliegt, die zu falschen Vorhersagen führt. In den gebräuchlichsten Modellen zur Vermarkerung des gesamten Körpers in der Bewegungsanalyse, wie etwa Kingma u. a. (1996), vgl. auch Leardini u. a. (2009), sind dementsprechend wenige Marker für die Wirbelsäule vorgesehen.

Die Arbeitshypothese für diese Arbeit ist, dass ein reduziertes Modell für die Wirbelsäulenlinie als deformierbare Raumkurve mit einem Konzept zur Kompensation von Hautartefakten aus einer vergleichsweise geringen Anzahl an Hautmarkern geschätzt werden kann. Bei ausreichender Genauigkeit hätte dies wegen des geringeren Zeitaufwands zur Vermarkerung große Vorteile für die Praxis.

Die Problemstellung dieser Arbeit ist daher wie folgt:

1. Es soll eine Methode bereitgestellt werden, um eine Spline-Raumkurve als Darstellung für die *Wirbelsäulenlinie* an Hautmarkerpositionen anzupassen.
2. Diese Methode soll in der Lage sein, mögliche Hautartefakte zu kompensieren.
3. Die Methode soll aus möglichst wenigen Hautmarkern eine Schätzung der Wirbelsäulenlinie angeben können.
4. Die Methode soll anhand von experimentell erhobenen Daten, die zu Bewegungen bzw. Konfigurationen von klinischer Relevanz korrespondieren auf Machbarkeit überprüft werden. Dazu soll auch ein Vergleich mit radiologischen Aufnahmen vollzogen werden.

3 Methoden der Splinekurvendarstellung und des Splinekurvenfittings

In diesem Kapitel werden die mathematischen Objekte und Methoden zusammengefasst, die die Darstellung und Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie anhand von wenigen äußeren Messungen von Hautmarkern erlauben. Dies sind die Differentialinvarianten einer allgemeinen Raumkurve, die Darstellung allgemeiner Raumkurven mithilfe von Splinefunktionen zur Wiedergabe von deformierbaren Elementen in der Wirbelsäulenlinie, sowie die sequentielle quadratische Programmierung zur Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen.

3.1 Fundamentalgrößen einer Raumkurve

Grundlage für das in dieser Arbeit zugrundegelegte Modell der Wirbelsäulenlinie sind die in den Lehrbüchern von Strubecker (1969), do Carmo (1976) und Struik (1988) dargestellten geometrischen Invarianten, welche zur besseren Nachvollziehbarkeit hier wiedergegeben werden.

3.1.1 Bogenlängen-Parameter

Nach do Carmo (1976) ist eine *parametrische C^n -Raumkurve* $\underline{r}(u)$ eine n -fach stetig differenzierbare Abbildung $\underline{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt ihr *Parameterbereich*, das Bild $\underline{r}([a, b])$ heißt *Trajektorie* der Kurve, die Variable u heißt *Kurvenparameter*.

Die Kurve \underline{r} heißt *regulär*, falls der Betrag der Ableitung $\frac{d}{du}\underline{r}(u)$ an keiner Stelle verschwindet, d.h.

$$\left\| \frac{d}{du}\underline{r}(u) \right\| > 0 \quad \forall u \in]a, b[,$$

sowie die rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen $\frac{d}{du}\big|_{u \rightarrow a} \underline{r}(u)$ und $\frac{d}{du}\big|_{u \rightarrow b} \underline{r}(u)$ existieren und ihr Betrag ebenfalls nicht verschwindet.

In dieser Arbeit wird eine Raumkurve interpretiert als vektorwertige Funktion

$${}^1\underline{r}(u) = [{}^1r_x(u) \ {}^1r_y(u) \ {}^1r_z(u)]^T$$

von Koordinaten gewisser Punkte der Trajektorie von $\underline{r}(u)$ bezogen auf ein Referenzsystem \mathcal{K}_1 . Später wird dieses Referenzsystem \mathcal{K}_1 als körperfestes System gedeutet, welches fest

mit dem Becken einer Person befestigt und sich mit Bezug auf ein ruhendes Weltsystem bzw. Laborsystem \mathcal{K}_0 bewegt. Solange ein Referenzsystem, bezüglich dessen Koordinaten ausgedrückt werden, nicht von Belang ist, wird im folgenden die allgemeine Schreibweise ohne das Superskript benutzt.

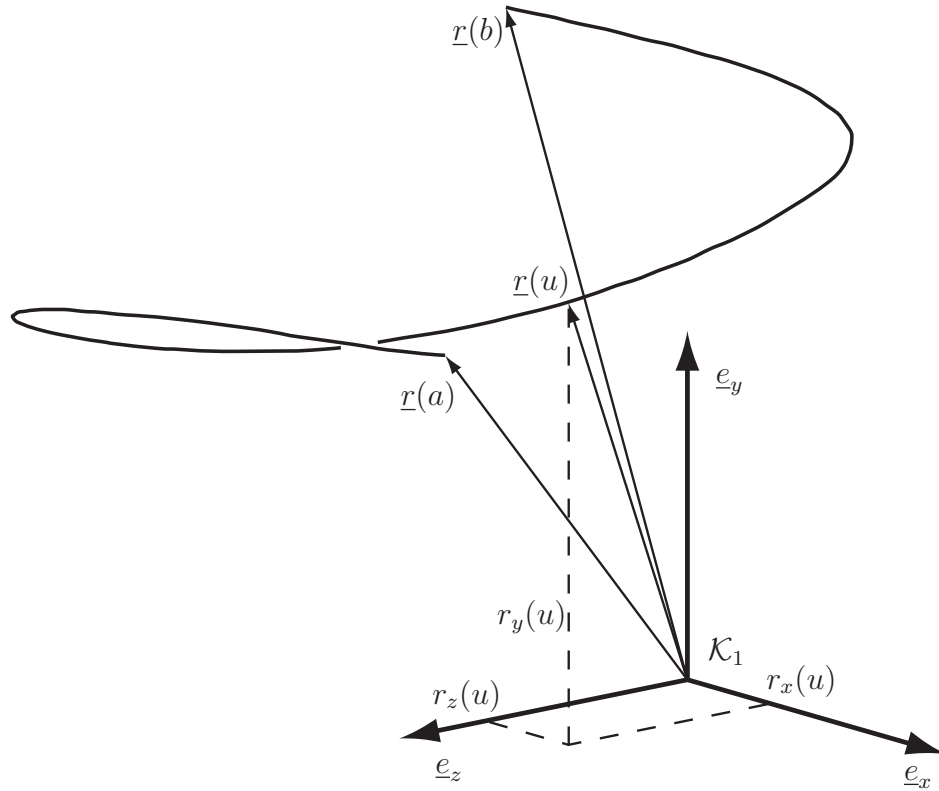


Abbildung 3.1: Trajektorie einer Raumkurve bezogen auf Referenzsystem \mathcal{K}_1

Die regulären Kurven sind dadurch ausgezeichnet, dass für sie der sogenannte natürliche Bogenlängenparameter s (Weglängenparameter) sinnvoll eingeführt werden kann. Die geometrische Bogenlänge $s(u)$ einer solchen Kurve $\underline{r}(u)$ ist definiert als das Integral

$$s(u) := \int_a^u \left\| \frac{d}{du} \underline{r}(u) \right\| du, \quad u \in [a, b]. \quad (3.1)$$

Für reguläre Kurven ist dann auch die stetige Umkehrabbildung $u(s) = s(u)^{-1}$ definiert und man erhält die Parametrisierung der Kurve $\underline{r}(u)$ nach Weglänge durch die Verkettung

$$\underline{r} : [0, s(b)] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \rightarrow \underline{r}(u(s)). \quad (3.2)$$

Im folgenden wird mit $\underline{r}(s)$ stets die nach der Weglänge parametrisierte Kurve $\underline{r}(u)$ notiert und mit $\underline{r}'(s)$ ihre Ableitung nach dem Bogenlängenparameter s . Es gilt $\|\underline{r}'(s)\| = 1$. Da der

Weglängenparameter damit implizit durch eine Differentialgleichung gegeben ist, die nur für bestimmte Spezialfälle geschlossen analytisch lösbar ist, wird in der Praxis das Integral (3.1) numerisch bestimmt und die Umkehrfunktion $u(s)$ näherungsweise ermittelt. Für konkrete Berechnungen in dieser Arbeit, wie für alle auf die Geometrie von Raumkurven bezogenen Größen, wurden dafür die Methoden aus Tändl u. a. (2007) benutzt.

3.1.2 Begleitendes Dreibein und Theorie der Streifen

In diesem Abschnitt wird der Begriff des *begleitenden Dreibeins* erläutert, eingebettet in die Theorie der Streifen nach Strubecker (1969). Durch ein begleitendes Dreibein können die sogenannten *intrinsischen Koordinaten* einer Raumkurve definiert werden. Diese werden weiter unten benutzt, um eine Metrik für die zu bestimmende Wirbelsäulenlinie einzuführen. Sämtliche im weiteren betrachteten Raumkurven seien \mathcal{C}^2 -regulär.

Nach Bishop (1975) ist ein *begleitendes Dreibein* entlang $\underline{r}(s)$ die Zuordnung eines Koordinatensystems $\mathcal{K}_2(s) := \{\underline{r}(s), \mathbf{R}(s)\}$ zu s , dessen Ursprung in $\underline{r}(s)$ liegt und dessen Drehmatrix $\mathbf{R}(s) = [\underline{e}_x \ \underline{e}_y \ \underline{e}_z]$ die Bedingung $\underline{e}_x = \underline{t}(s)$ erfüllt.

Eine abstrakte Methode, solche begleitende Dreibeine mathematisch abzuhandeln, ist die *Theorie der Streifen*, siehe Strubecker (1969):

Sei $\underline{r}(s)$ eine nach der Weglänge parametrisierte Raumkurve mit Parameterbereich $[0, s_{\max}]$. Ein *stetig gekrümmter Streifen* \mathfrak{S} entlang $\underline{r}(s)$ ist gegeben durch eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\underline{n} : [0, s_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\underline{n}(s)^T \underline{r}'(s) = 0, \tag{3.3}$$

$$\underline{n}(s)^T \underline{n}'(s) = 1. \tag{3.4}$$

Mit $\underline{t}(s) = \underline{r}'(s)$ sind die *Seitentangenten* $\underline{b}(s)$ des Streifens gegeben durch

$$\underline{b}(s) = \underline{n}(s) \times \underline{t}(s). \tag{3.5}$$

Die Zuordnung der von $\underline{t}(s)$ und $\underline{b}(s)$ aufgespannten Ebenen zu s heißt *Schar der Tangentialebenen* des Streifens \mathfrak{S} . $\underline{r}(s)$ heißt *Leitkurve* des Streifens. Die Zuordnung der Koordina-

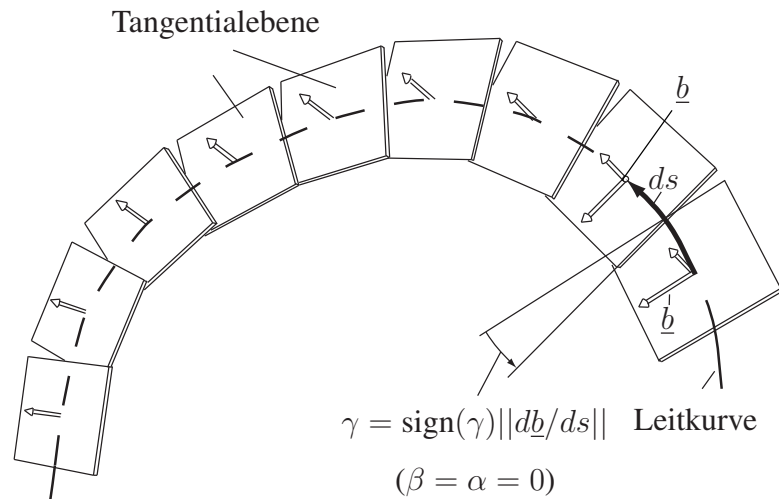
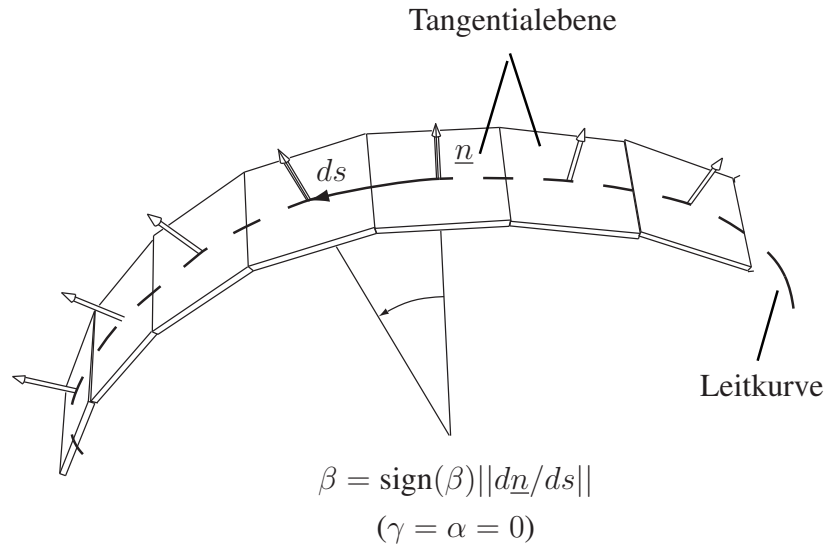


Abbildung 3.2: Zwei Streifen mit Leitkurven, Normalkrümmung (oben) und geodätischer Krümmung (unten)

tensysteme

$$\mathcal{K}_2(s) := \{\underline{r}(s), [\underline{t}(s), \underline{b}(s), \underline{n}(s)]\} \quad (3.6)$$

zu s heißt *begleitendes Dreiein* zu \mathfrak{S} .

Ein solcher stetig gekrümmter Streifen ist eine allgemeine Methode, begleitende Dreieine zu definieren, so dass die Drehmatrix $\mathbf{R}(s)$ eine stetig differenzierbare und glatte Funktion ist. In diesem Sinne wird die Matrix $\mathbf{R}'(s) = [\underline{t}'(s), \underline{b}'(s), \underline{n}'(s)]$ als Ableitung von $\mathbf{R}(s)$ aufgefaßt. Die *Ableitungsgleichungen der Streifentheorie (Burali-Forti-Gleichungen)* haben

dann die Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{t}'(s) & \underline{b}'(s) & \underline{n}'(s) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \gamma(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & 0 & \alpha(s) \\ -\beta(s) & -\alpha(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{t}(s) & \underline{b}(s) & \underline{n}(s) \end{bmatrix}^T. \quad (3.7)$$

und sind für alle stetig gekrümmten Streifen \mathfrak{S} definiert. Die stetig differenzierbaren Funktionen $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = -\beta(s)$ und $\gamma = \gamma(s)$ heißen *geodätische Windung*, *Normalkrümmung* und *geodätische Krümmung* des Streifens \mathfrak{S} . Dabei kann man die Burali-Forti-Gleichungen auch in einen kinematischen Kontext setzen: Interpretiert man das begleitende Dreibein als ein Bezugssystem (Festkörper) \mathcal{K}_2 , das sich mit Einheitsgeschwindigkeit $\dot{s} = 1$ entlang einer Trajektorie $\underline{r}(s)$ bezogen auf ein Inertialsystem \mathcal{K}_1 bewegt, so kann man die Gleichung (3.7) als Poisson'sche Regel für die Winkelgeschwindigkeit ${}^2\omega(s)$ von \mathcal{K}_2 in körperfesten Koordinaten interpretieren:

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{R}(s) \cdot {}^2\tilde{\omega}(s) \Leftrightarrow {}^2\tilde{\omega}(s) = \mathbf{R}^T(s) \cdot \mathbf{R}'(s), \quad (3.8)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$${}^2\underline{\omega}(s) = \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

und dem Tilde-Operator

$$\underline{\tilde{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Nach Strubecker (1969) gilt folgender Satz:

Ein stetig gekrümmter Streifen \mathfrak{S} ist bis auf eine Festkörpertransformation eindeutig durch

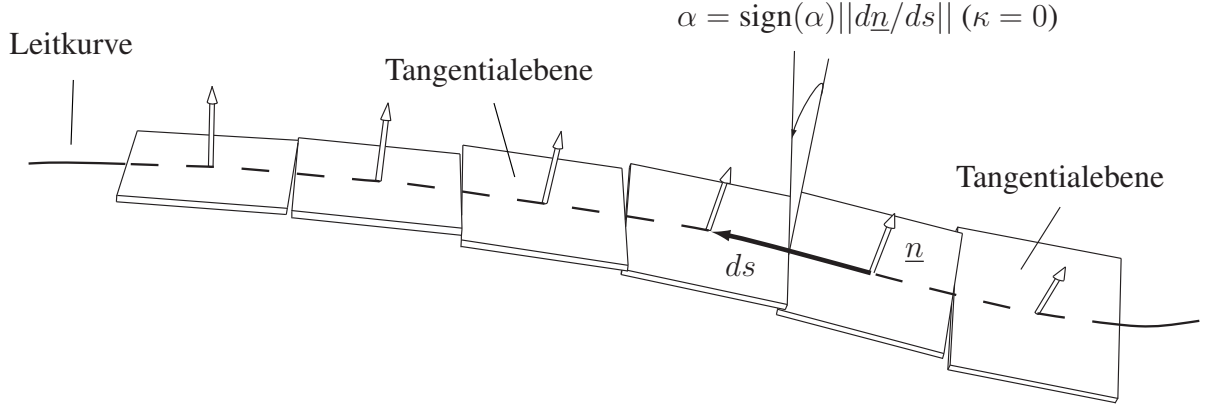


Abbildung 3.3: Streifen mit Leitkurve, Tangentialebene und geodätischer Windung

die Differentialinvarianten α , β und γ definiert. Die Differentialinvarianten nennt man auch *intrinsische Koordinaten* von \mathfrak{S} .

In der Differentialgeometrie haben zwei Klassen von Streifen besondere Bedeutung: Ist $\gamma(s) \equiv 0$, so spricht man von einem *geodätischen Streifen*. Diese Streifen sind für die Fragestellung dieser Arbeit nicht von Bedeutung. Ist hingegen $\alpha(s) \equiv 0$, so heißt der Streifen *Krümmungsstreifen* und das begleitende Dreibein des Streifens wird *Bishop-Dreibein* genannt, nach Bishop (1975), siehe auch Tändl u. a. (2007). Das begleitende Dreibein entsteht dann durch *Parallelverschiebung* (siehe do Carmo (1976) und Bishop (1975)) einer Anfangsbedingung $\mathcal{K}_2(0) = \{\underline{r}(0), [\underline{t}(0), \underline{b}(0), \underline{n}(0)]\}$ entlang der Trajektorie $\underline{r}(s)$. Bishop nennt die Differentialinvarianten β und γ für einen Krümmungsstreifen *Normalentwicklung* für die Leitkurve des Streifens. Im Sinne des oberen Satzes legt die Normalentwicklung zusammen mit einer Anfangsbedingung $\mathcal{K}_2(0)$ für das begleitende Dreibein wie oben die Kurve $\underline{r}(s)$ eindeutig fest. Umgekehrt ist ein Bishop-Dreibein und damit die Normalentwicklung für eine Kurve $\underline{r}(s)$ nur bis auf Rotation dieser Anfangsbedingung um die Tangente $\underline{t}(0)$ bei $\underline{r}(0)$ eindeutig definiert, siehe Bishop (1975).

Ein dritter Spezialfall ist das *Frenet'sche begleitende Dreibein*, dass historisch am frühesten untersucht wurde. Betrachtet man die *euklidische Krümmung* $\kappa(s)$ von $\underline{r}(s)$, definiert durch:

$$\kappa(s) := ||\underline{t}'(s)|| = ||\underline{r}''(s)||, \quad (3.11)$$

so ergibt sich der Frenet'sche Einheitsnormalenvektor $\hat{\underline{n}}(s)$ als:

$$\hat{\underline{n}}(s) := \frac{\underline{r}''(s)}{\kappa(s)}. \quad (3.12)$$

Der Standard-Binormalenvektor $\hat{\underline{b}}(s)$ ist, wo definiert, gegeben durch:

$$\hat{\underline{b}}(s) := \underline{t}(s) \times \hat{\underline{n}}(s). \quad (3.13)$$

Dann ist das Frenet'sche begleitende Dreibein definiert durch:

$$\mathcal{K}_F(s) := \{\underline{r}(s), [\underline{t}(s) \hat{\underline{n}}(s) \hat{\underline{b}}(s)]\}. \quad (3.14)$$

Die Burali-Forti-Gleichungen zu diesem begleitenden Dreibein heißen dann Frenet-Serret-Gleichungen, siehe Strubecker (1969) und haben die Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{t}'(s) & \hat{\underline{n}}'(s) & \hat{\underline{b}}'(s) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{t}(s) & \hat{\underline{n}}(s) & \hat{\underline{b}}(s) \end{bmatrix}^T. \quad (3.15)$$

Das Frenet'sche begleitende Dreibein ist dadurch charakterisiert, dass die Normalkrümmung $\beta_F(s)$ überall verschwindet. Wegen der expliziten Definition dieses Dreibeins nennt man die Größen τ und κ auch die natürlichen Differentialinvarianten der Kurve $\underline{r}(s)$. Es gilt für jeden Streifen mit den obigen Definitionen:

$$\kappa^2(s) = \beta^2(s) + \gamma^2(s). \quad (3.16)$$

Da die expliziten Formeln jedoch nahe Punkten mit $\kappa(s) = 0$ singulär werden und auch die geometrischen Eigenschaften des Frenet'schen Dreibeins (siehe do Carmo (1976) und Strubecker (1969)) für diese Arbeit keinen zusätzlichen Nutzen bringen, wird diese Konstruktion hier nicht verwendet.

3.1.3 Begleitendes Dreibein nach Darboux

Wie im letzten Abschnitt erläutert, ist die Definition eines begleitenden Dreibeins zu einer Kurve $\underline{r}(s)$ im wesentlichen äquivalent zur Definition eines Streifens entlang dieser Kurve. Eine alternative Methode zur Definition eines begleitenden Dreibeins entlang einer Kurve, welche die Einführung eines „Horizontvektors“ erlaubt, wurde von G. Darboux (siehe Darboux (1894)) vorgeschlagen. Im folgenden wird diese Methode gemäß den Ausführungen in

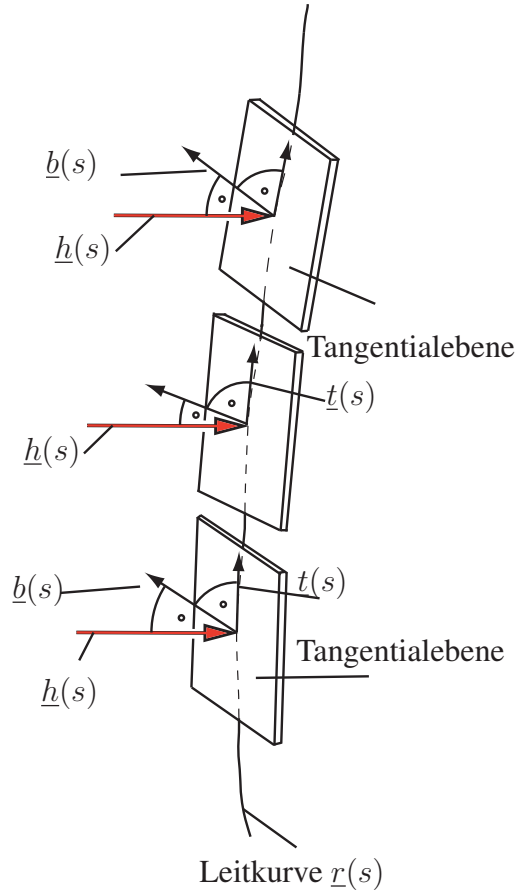


Abbildung 3.4: Erzeugung eines Darboux-Streifens durch ein Horizontfeld entlang der Leitkurve

Tändl (2009) wiedergegeben. Das begleitende Darboux-Dreibein wird so entlang der Leitkurve $\underline{r}(s)$ ausgerichtet, dass die Seitentangente $\underline{b}(s)$ orthogonal zur Einheitstangente $\underline{t}(s)$ und zum Horizontvektor $\underline{h}(s)$ ausgerichtet ist, siehe Bild 3.4.

Es seien eine Raumkurve $\underline{r}(s)$ mit Parameterbereich $[0, s_{\max}]$ und eine zweifach stetig differenzierbare *Horizontfunktion* $\underline{h} : [0, s_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben, so dass $\underline{h} \times \underline{t}(s) \neq 0$ für alle s . Es sei ferner $\lambda(s) = \|\underline{h} \times \underline{t}(s)\|$.

Dann ist das *begleitende Darboux-Dreibein* $\{\underline{r}(s), [\underline{t}(s), \underline{b}(s), \underline{n}(s)]\}$ entlang $\underline{r}(s)$ gegeben durch

$$\underline{t}(s) = \underline{r}'(s), \quad (3.17)$$

$$\lambda(s) = \|\underline{h} \times \underline{t}(s)\|, \quad (3.18)$$

$$\underline{b}(s) = \frac{\underline{h}(s) \times \underline{t}(s)}{\lambda(s)}, \quad (3.19)$$

$$\underline{n}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{b}(s). \quad (3.20)$$

Für die Differentialinvarianten dieses Streifens ergibt sich:

$$\alpha(s) = \frac{\underline{h}(s)^T \underline{t}(s) \cdot [\underline{t}'(s) - \underline{h}'(s)]^T \underline{b}(s)}{\lambda}, \quad (3.21)$$

$$\beta(s) = \underline{t}'(s)^T \underline{n}(s), \quad (3.22)$$

$$\gamma(s) = \underline{t}'(s)^T \underline{b}(s). \quad (3.23)$$

In der Arbeit von Tändl (2009) wird eine C++-Bibliothek beschrieben (genannt MoCurveJoint) das die Generierung von Raumkurven, sowie deren Erweiterung zu einem Streifen auf Basis von B-Splinekurven gestattet. Darin wird dargelegt, dass die Definition eines begleitenden Dreibeins entlang einer Spline-Raumkurve nach Darboux in den Punkten Einfachheit der Implementation, Flexibilität, Einfachheit der Handhabung, sowie numerischer Robustheit die besten Eigenschaften aufweist. Daher wird in der vorliegenden Arbeit für die Erzeugung von Raumkurven und deren Streifen die in der C++-Bibliothek MoCurveJoint enthaltenen Funktionen für B-Splinekurven und das Darboux-Dreibein verwendet. Zur besseren Übersicht wird im folgenden Abschnitt die mathematische Struktur zur Generierung von Splinekurven beschrieben.

3.2 Splinesfunktionen und B-Splinekurven

Die Ausführungen sind aus den Lehrbücher Hoschek und Lasser (1993), de Boor (2001) und Piegl und Tiller (1997) entnommen und hier zur besseren Nachvollziehbarkeit der späteren Eigenschaften des in der Arbeit entwickelten Algorithmus wiedergegeben.

Es seien gegeben ein Intervall $U = [a, b] \in \mathbb{R}$ und eine aufsteigende *Knotenmenge* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ gegeben. Dann ist eine *Splinefunktion* p -ten Grades auf U definiert als eine Funktion

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

die den folgenden Bedingungen genügt:

- Die Funktion r ist gleich einem Polynom p -ten Grades auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}[$, $j = 0, \dots, m - 1$ und
- die Funktion r ist $(p - 1)$ -fach stetig differenzierbar auf $[a, b]$, d.h. r ist von der Klasse \mathcal{C}^{p-1} .

Es besteht grundsätzlich die Möglichkeit, Splinefunktionen zu konstruieren, in dem man m Polynome der Form

$$f_j(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^p a_{j,k} x^k, & x \in [t_j, t_{j+1}[\\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (3.24)$$

zusammenfügt, wobei man verlangt, dass $p \cdot (m-1)$ Stetigkeits-Randbedingungen der Form

$$f_j^{(\ell)}(t_{j+1}) = f_{j+1}^{(\ell)}(t_{j+1}), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad \ell = 0, \dots, p-1 \quad (3.25)$$

erfüllt sind. Hier notiert (ℓ) die ℓ -te Ableitung. Wertet man die Ableitungen explizit aus, haben diese Stetigkeitsbedingungen unter Beachtung der Regel $0^0 = 1$ die Form:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p a_{j,k} t_{j+1}^k &= \sum_{k=0}^p a_{j+1,k} t_{j+1}^k, \\ \sum_{k=1}^p k a_{j,k} t_{j+1}^{k-1} &= \sum_{k=1}^p k a_{j+1,k} t_{j+1}^{k-1}, \\ \sum_{k=2}^p k(k-1) a_{j,k} t_{j+1}^{k-2} &= \sum_{k=2}^p k(k-1) a_{j+1,k} t_{j+1}^{k-2}, \\ &\dots \\ \sum_{k=\ell}^p \frac{k!}{(k-\ell-1)!} a_{j,k} t_{j+1}^{k-\ell} &= \sum_{k=\ell}^p \frac{k!}{(k-\ell-1)!} a_{j+1,k} t_{j+1}^{k-\ell}, \\ j &= 1, \dots, m-1, \quad \ell = 0, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Für feste Knoten t_j ergibt sich ein nicht-ausgeartetes lineares Gleichungssystem in Dreiecksform für die Koeffizienten $a_{j,k}$. Da die Funktionen f_j ebenfalls linear in den $a_{j,k}$ und Linearkombinationen von Splinefunktionen wieder Splinefunktionen sind, ergibt ein Vergleich von Freiheitsgraden und Nebenbedingungen der f_j , dass die Splinefunktionen des Grades n für eine gegebene Menge von $m+1$ Knoten t_j einen Vektorraum \mathcal{V} der Dimension $m+p$ bilden. Eine numerisch stabil und effizient auswertbare Basis von Funktionen für \mathcal{V} wird wie folgt von Hoschek und Lasser (1993) und Piegl und Tiller (1997) angegeben:

Es sei ein Intervall $U = [a, b]$, eine aufsteigenden Knotenmenge $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ sowie der Grad p gegeben. Dann ist der *eingespannte Knotenvektor* zum Grad p ,

$\underline{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2p+m}]$ gegeben durch:

- $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = a$
- $\lambda_{p+j} = t_j, j = 1, \dots, m-1$
- $\lambda_{p+m} = \lambda_{n+m+1} = \dots = \lambda_{2p+m} = b.$

Die Knoten λ_j mit $\lambda_j \neq a, \lambda_j \neq b$ heißen *innere Knoten*. Die Intervalle $[\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ heißen j -tes elementares Knotenintervall.

Die *normalisierten Basisfunktionen* $N_{i,n}$ von Grad n für den eingespannten Knotenvektor $\underline{\lambda}$ sind gegeben durch die Rekursionsformeln:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \lambda_i \leq u < \lambda_{i+1} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$i = 0, \dots, 2p + m - 1,$$

$$N_{i,n}(u) = \frac{u - \lambda_i}{\lambda_{i+n} - \lambda_i} N_{i,n-1} + \frac{\lambda_{i+n+1} - u}{\lambda_{i+n+1} - \lambda_{i+1}} N_{i+1,n-1}(u), \quad (3.28)$$

$$i = 0, \dots, 2p + m - n - 1, n = 1, \dots, p.$$

Dabei wird für Brüche der Form $\frac{0}{0}$ der Wert 0 angenommen.

Mit diesen Definitionen gilt der Satz (siehe Piegler und Tiller (1997)), dass für eine gegebenes Intervall $U = [a, b]$, eine gegebene Knotenmenge $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ innerhalb U und den gegebenen Grad p die normalisierten Basisfunktionen $N_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, p + m - 1$, definiert durch den eingespannten Knotenvektor $\underline{\lambda}$ zum Grad p für die t_i , eine Basis für den Vektorraum der Splinefunktionen von Grad p auf U mit der Knotenmenge t_i bilden.

In der Literatur werden die normalisierten Basisfunktionen für allgemeinere Knotenvektoren $\underline{\lambda}$, deren Knoten lediglich die Bedingungen $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ und $\lambda_j < \lambda_{j+p+1}$ erfüllen sollen, definiert. Diese bilden eine Basis für einen allgemeinen Vektorraum von stückweise polynomialen Funktionen. Erfüllen die inneren Knoten die Bedingung, dass $\lambda_i < \lambda_{i+c}$ ist, so ist dies ein Raum von sogenannten *Subsplines* von der Klasse \mathcal{C}^{p-c} auf U , siehe Hoschek und Lasser (1993). In dieser Arbeit werden nur die eingespannten Knotenvektoren für aufsteigende Knotenmengen, die zu Splinefunktionen führen, verwendet.

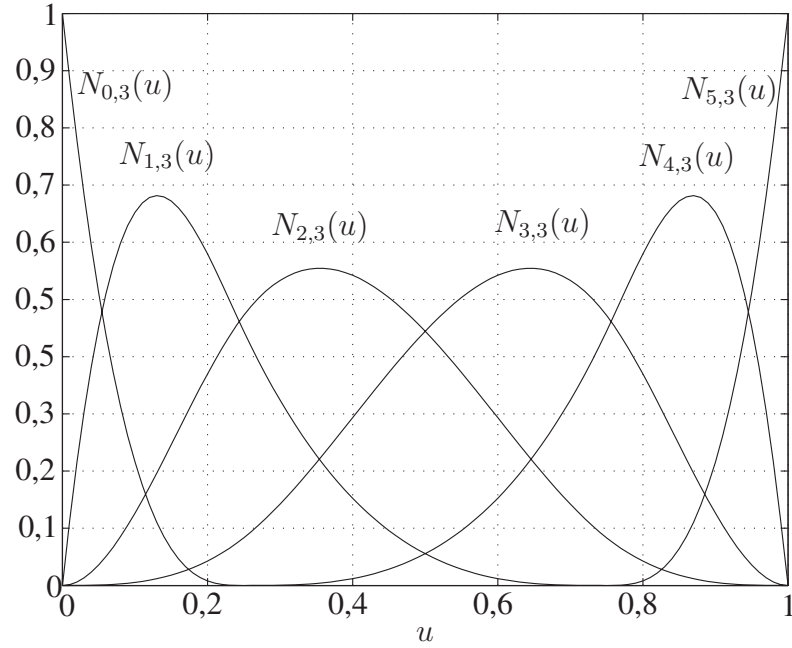


Abbildung 3.5: Basisfunktionen zum Knotenvektor $\underline{\lambda} = [0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1]$

Die normalisierten Basisfunktionen haben auch folgende nützliche Eigenschaften, vgl. Piegel und Tiller (1997):

1. $N_{i,n} = 0 \ \forall u \notin [\lambda_i, \lambda_{i+n+1}[$ (lokaler Support).
2. Innerhalb jedes elementaren Knotenintervalls $[\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ sind $n+1$ der Basisfunktionen von Grad n nicht identisch 0; diese sind $N_{j-n,n}, \dots, N_{j,n}$.
3. $\sum_{j=i-n}^i N_{j,n}(u) = 1 \ \forall u \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ (Zerlegung der eins).
4. $N_{j,n}(u) \geq 0 \ \forall u$ (nicht-Negativität).
5. $N'_{j,n}(u) = \frac{n}{\lambda_{j+n}-\lambda_j} N_{j,n-1} - \frac{n}{\lambda_{j+n+1}-\lambda_{j+1}} N_{j+1,n-1}(u)$.

Ist eine allgemeine Splinefunktion r von Grad p für einen Knotenvektor $\underline{\lambda}$ gegeben als Linearkombination

$$r(u) = \sum_{i=0}^{p+m-1} c_i N_{i,p}(u), \quad (3.29)$$

so nennt man die Koeffizienten c_i die „eindimensionalen *de-Boor-Punkte*“ zum Spline s und der Ausdruck (3.29) heißt B-Splineform von s .

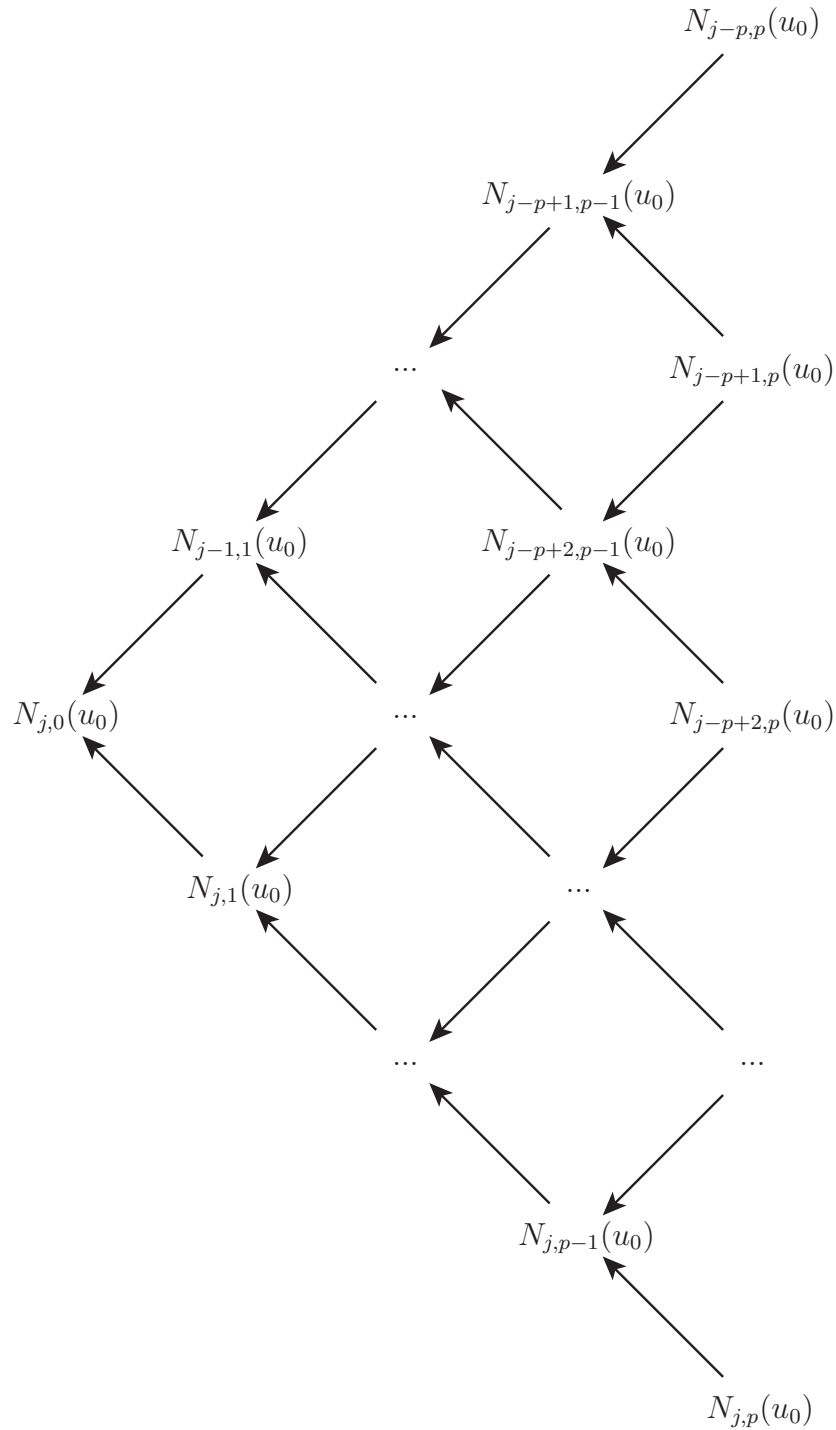


Abbildung 3.6: Nichttriviale Terme der B-Spline Rekursion

Will man eine solche Splinefunktion an einem allgemeinen Punkt $u_0 \in [a, b]$ auswerten oder eine Ableitung bestimmen, so kann man sich die rekursive Definition und die oben genannten Eigenschaften der Basisfunktionen zunutze machen, um einen effizienten Algorithmus zu entwerfen: Ist der Index j des j -ten elementaren Knotenintervalls $[\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ bekannt, so dass $u_0 \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, so brauchen nur die $p + 1$ Basisfunktionen in die Evaluierung von

$s(u_0)$ einbezogen werden, die nicht identisch 0 in diesem Knotenintervall sind. Die Berechnung jeder dieser Basisfunktionen geht auf zwei Basisfunktionen von Grad $p - 1$ zurück, von denen zusammengekommen auf dem j -ten Knotenintervall jeweils wiederum p nicht identisch verschwinden, und so fort. Dies führt zu einem dreiecksförmigen Rekursionsschema, siehe Bild 3.6, dem Casteljau-Algorithmus, vgl. de Boor (2001). Für die Berechnung der nichttrivialen k -ten Ableitungen gelten entsprechende analoge Regeln, siehe ebenda. In den gängigen numerischen Bibliotheken zur Behandlung von Splinefunktionen in B-Spline-Form wird der Index j in der Regel per binärer Suche in der Knotenmenge ermittelt und alle nichttrivialen Basisfunktionen und Ableitungen zum Grad p in einem Arbeitsschritt ermittelt. Dazu wird das Rekursionsschema aus Bild 3.6 Spaltenweise aufgebaut, siehe Piegel und Tiller (1997).

Es ist hervorzuheben, dass diese Eigenschaften der Basisfunktionen dazu führen, dass eine Änderung eines Koeffizienten c_j die Funktion $s(u)$ nur im Bereich $[\lambda_j, \lambda_{j+n+1}[$ ändert. Dies wird besonders wirksam, wenn die de-Boor-Punkte Designparameter eines Optimierungsproblems sind, dessen Zielfunktion von der geometrischen Form der Funktion $s(u)$ abhängt, wie weiter unten beschrieben.

3.2.1 B-Splinekurven

Gemäß Piegel und Tiller (1997) lassen sich die Splineeigenschaften auch aus gewissen Kontrollpolygonen ermitteln, die im folgenden näher erläutert werden.

Sei ein eingespannter Knotenvektor $\underline{\lambda}$ zum Grad p mit $m - 1$ inneren Knoten für ein Intervall $U = [a, b]$ gegeben. Eine *B-Spline-Raumkurve* \underline{r} ist definiert durch den Ausdruck

$$\underline{r}(u) = \sum_{i=0}^{p+m-1} \underline{c}_i N_{i,p}, \quad (3.30)$$

mit den *Kontrollpunkten (de-Boor-Punkten)* $\underline{c}_i \in \mathbb{R}^3$. Die Folge der Segmente $\overline{\underline{c}_{i-1}\underline{c}_i}$, $i = 1, \dots, p + m - 1$ heißt *Kontrollpolygon* der B-Spline-Raumkurve \underline{r} .

Formal kann man B-Splinekurven zur Dimension d definieren, indem man fordert, dass die Kontrollpunkte die Eigenschaft $\underline{c}_j \in \mathbb{R}^d$ haben. Da in dieser Arbeit nur Raumkurven von Interesse sind, wird der Ausdruck B-Spline-Kurve als kurzes Synonym für B-Spline-Raumkurve verwendet. Diese B-Spline-Kurven haben folgende Eigenschaften, siehe Piegel und Tiller (1997) und Hoschek und Lasser (1993):

1. $\underline{r}(a) = \underline{c}_0, \underline{r}(b) = \underline{c}_{p+m-1}$ (Geschlossenheit).
2. $\underline{r}'(a) \parallel (\underline{c}_1 - \underline{c}_0), \underline{r}'(b) \parallel (\underline{c}_{p+m-1} - \underline{c}_{p+m-2})$ (Schmiegung ersten Grades).
3. Ersetzt man \underline{c}_j durch \underline{c}'_j , so ändert sich die Kurve nur im Intervall $[\lambda_{j-p}, \lambda_j]$ (lokale Wirkung)
4. $\underline{r}(u)$ verläuft innerhalb des konvexen Abschlusses seines Kontrollpolygons. $\underline{r}([\lambda_{j-p}, \lambda_j])$ ist enthalten im konvexen Abschluss der Kontrollpunkte $\underline{c}_{j-p}, \underline{c}_{j-p+1}, \dots, \underline{c}_j$ (starke Konvexe-Hüllen-Eigenschaft).

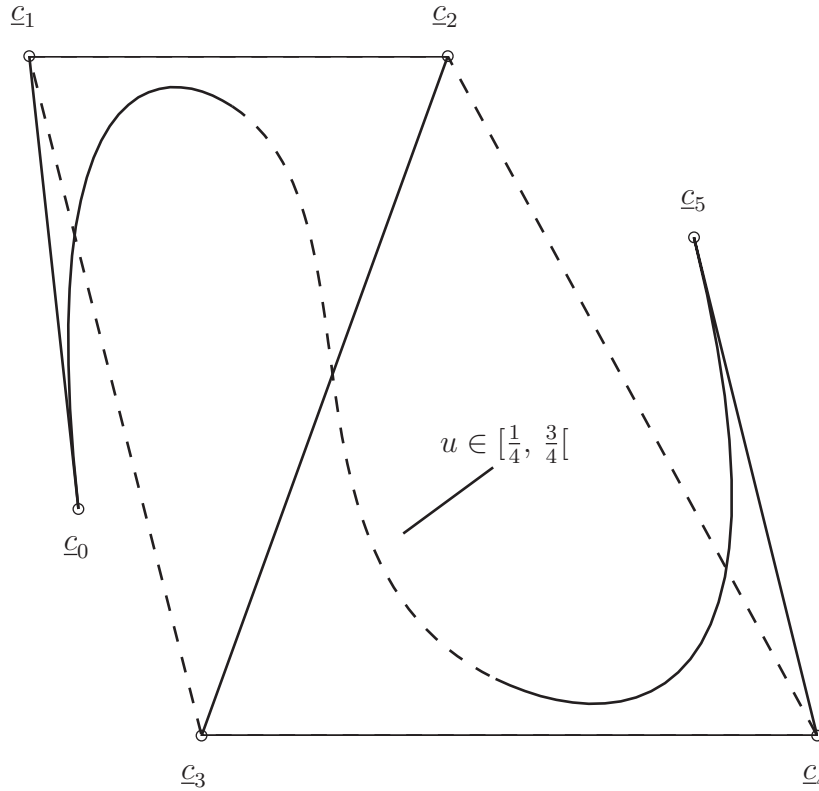


Abbildung 3.7: Starke Konvexe Hülleneigenschaft: Kubische B-Splinekurve zum Knotenvektor $[0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1]$ mit Kontrollpolygon.

Diese Eigenschaften ergeben sich direkt aus den oben genannten Eigenschaften der Basisfunktionen. Iteriert man die im vorherigen Abschnitt gegebene Formel für die Ableitung der Basisfunktionen und setzt sie in die B-Spline-Form einer Kurve ein, so ergibt sich für die Ableitungen einer B-Spline-Kurve, vgl. Piegl und Tiller (1997) und de Boor (2001):

$$\underline{r}^{(j)}(u) = \sum_{i=0}^{p+m-1-j} \underline{c}_i^{(j)} N_{i,n-j}, \quad (3.31)$$

mit der Rekursionsformel:

$$\underline{c}_i^{(j)} = \begin{cases} \underline{c}_i, & \text{für } j = 0 \\ \frac{n-j+1}{\lambda_{i+n+1}-\lambda_{i+j}}(\underline{c}_{i+1}^{(j-1)} - \underline{c}_i^{(j-1)}), & \text{für } j > 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Die j -ten Ableitungen sind also spezielle B-Splinekurven zum Grad $n - j$ mit der Knotenmenge, die sich ergeben, indem man jeweils die ersten und letzten j Knoten aus der Knotenmenge von $\underline{r}(u)$ entfernt. Insbesondere sind die j -ten Ableitungen am Rand des Intervalls $U = [a, b]$ durch Berechnung eines Rand-Koeffizienten $\underline{c}_0^{(j)}, \underline{c}_{p+m-1-j}^{(j)}$ gegeben.

3.2.2 Splinekurven als Lösung eines Interpolationsproblems

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, gibt das Kontrollpolygon einer Splinekurve $\underline{r}(u)$ durch die konvexe-Hüllen-Eigenschaft einen Bereich vor, innerhalb dessen die Kurve $\underline{r}(u)$ verläuft. Während dieses Kontrollpolygon für Grad $p = 1$ mit der definierten Splinekurve identisch ist, entfernt sich die Splinekurve $\underline{r}(u)$ mit steigendem Grad im Allgemeinen immer weiter von seinem Kontrollpolygon. Daher ist die Interpretation des Kontrollpolygons für größere Grade $p > 1$ wenig intuitiv. Durch die Parametrisierung einer Splinekurve als Lösung eines Interpolationsproblems wird es möglich, auf natürliche Weise Nebenbedingungen für die de-Boor-Punkte \underline{c}_j herzuleiten, die dafür sorgen, dass die Splinekurve innerhalb eines örtlich eng beschränkten Bereichs verläuft.

Gemäß Nürnberger (1989) kann man zu einem eingespannten Knotenvektor

$\underline{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d_f+p+1}]$, den Basisfunktionen $N_{i,p}, i = 0, \dots, d_f$ und dem Intervall $U = [a, b]$ sowie einer Folge von Parameterstellen $u_j, j = 0, \dots, d_f$ und Parameterpunkten (*Stützpunkten*) \underline{p}_j mit $u_i \leq u_{i+1}$ die *Vielfachheit* d_i der Parameterstelle u_i als

$$d_i = \max l : u_{i-l} = u_i \quad (3.33)$$

definieren. Ist die Vielfachheit der Parameterstellen höchstens $p - 1$, dann ist ein *Hermite-Splinekurven-Interpolationsproblem* gegeben durch

$$\underline{r}(u) = \sum_{i=0}^{d_f} \underline{c}_i N_{i,p} : \underline{r}^{(d_j)}(u_j) \stackrel{!}{=} \underline{p}_j, j = 0, \dots, d_f. \quad (3.34)$$

In dieser Form wurden die in der Definition der Basis-Splines benutzten Parameter m, p bewusst durch den Index d_f ersetzt, um die Anzahl der Basis-Funktionen $d_f + 1 = m + p + 1$ der

Splineräume zu notieren. Die Lösbarkeit eines allgemeinen Hermite-Interpolationsproblems ist durch folgenden Satz geregelt, siehe Nürnberger (1989):

Das Hermite-Interpolationsproblem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Parameterstellen die *Schoenberg-Whitney-Bedingungen*

$$\lambda_j < u_j < \lambda_{j+p+1}, \quad j = 0, \dots, d_f - p - 1 \quad (3.35)$$

erfüllen, wobei für die Randknoten $\lambda_j = a$ oder $\lambda_j = b$ Gleichheit erlaubt ist.

Im folgenden werden nur Hermite-Interpolationsprobleme betrachtet, bei denen höchstens p Anfangs- und Endbedingungen der Form

$$\underline{r}^{(l_a)}(\lambda_0) \stackrel{!}{=} \underline{p}_l, \quad l_a = 0, \dots, d_a, \quad \underline{r}^{(l_e)}(\lambda_m) \stackrel{!}{=} \underline{p}_{m-d_e+l_e}, \quad l_e = 0, \dots, m_e, \quad (3.36)$$

gegeben sind, wobei die restlichen *inneren* Parameterstellen die Vielfachheit 1 haben sollen. Dann ist $d_a + 1$ die Anzahl der Anfangsbedingungen und $d_e + 1$ die Anzahl der Endbedingungen. In diesem Sinne wird angenommen, dass die ersten $d_a + 1$ Parameterstellen zu a identisch sind sowie die letzten $d_e + 1$ Parameterstellen zu b identisch sind. Die Interpolationsbedingungen für die inneren Parameterstellen haben dann explizite Form

$$\sum_{i=0}^{d_f} c_i N_{i,p}(u_j) = \underline{p}_j, \quad j = d_a + 1, \dots, d_f - d_e - 1. \quad (3.37)$$

Für eine feste Basis — also einen konstanten Knotenvektor $\underline{\lambda}$ — und feste Parameterstellen u_j sind diese Bedingungen lineare Funktionen der (gesuchten) Kontrollpunkte, \underline{c}_j und die Anfangs- und Endbedingungen haben explizit die Form

$$\begin{aligned} \underline{c}_0^{(l_a)} &= \underline{p}_{l_a}, \quad l_a = 0, \dots, d_a, \\ \underline{c}_{d_f-l_e}^{(l_e)} &= \underline{p}_{d_f-d_e+l_e}, \quad l_e = 0, \dots, d_e, \end{aligned} \quad (3.38)$$

welche ebenfalls linear in den Kontrollpunkten \underline{c}_j sind. Damit ist die Lösung eines Interpolationsproblems wie oben definiert bei festen $\underline{\lambda}$ und Stützpunkten \underline{p}_j gegeben durch die Lösung eines linearen Problems

$$\mathbf{E}[\underline{c}_0^T \underline{c}_1^T \dots \underline{c}_{d_f}^T]^T = [\underline{p}_0^T \underline{p}_1^T \dots \underline{p}_{d_f}^T]^T, \quad (3.39)$$

wobei die Matrix \mathbf{E} zeilenweise aus den Anfangs-, inneren und Endbedingungen Gl. 3.38, Gl. 3.37 aufgebaut ist. Die Matrix \mathbf{E} wird in diesem Zusammenhang *Kollokationsmatrix* oder *Gram-Matrix* genannt. Sie ist nach dem oben genannten Satz invertierbar und hängt nur von $\underline{\lambda}$ und den u_j ab. Tatsächlich hat die Matrix \mathbf{E} eine spezielle Bandmatrix-Form, deren Inverse z.B. durch ein Spaltenpivotisierungsverfahren effizient bestimmt werden kann, siehe Nürnberger (1989) und Stoer (1983). Ist ein Knotenvektor $\underline{\lambda}$ und sind Parameterstellen u_j gewählt, kann man somit eine allgemeine B-Splinekurve durch eine korrekte Anzahl von Stützpunkten \underline{p}_j durch die lineare Transformation

$$[\underline{c}_0^T \ \underline{c}_1^T \ \dots \ \underline{c}_{d_f}^T]^T = \mathbf{E}^{-1} [\underline{p}_0^T \ \underline{p}_1^T \ \dots \ \underline{p}_{d_f}^T]^T \quad (3.40)$$

parametrisieren. Will man den Bereich, innerhalb dessen solch eine Splinekurve verläuft, einschränken, so kann man die Lage der Stützstellen beschränken, in dem man verlangt, dass die Koordinaten dieser Stützstellen innerhalb eines Intervalls verlaufen:

$$\begin{aligned} l_{0,x} &\leq p_{0,x} \leq u_{0,x}, \\ l_{0,y} &\leq p_{0,y} \leq u_{0,y}, \\ l_{0,z} &\leq p_{0,z} \leq u_{0,z}, \\ &\dots \\ l_{j,x} &\leq p_{j,x} \leq u_{j,x}, \\ l_{j,y} &\leq p_{j,y} \leq u_{j,y}, \\ l_{j,z} &\leq p_{j,z} \leq u_{j,z}, \\ &\dots \\ l_{d_f,x} &\leq p_{d_f,x} \leq u_{d_f,x}, \\ l_{d_f,y} &\leq p_{d_f,y} \leq u_{d_f,y}, \\ l_{d_f,z} &\leq p_{d_f,z} \leq u_{d_f,z}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Setzt man die Beziehung Gl. 3.39 ein, so ergibt sich in Matrixform:

$$\underline{l} \leq \mathbf{E} [\underline{c}_0^T \ \underline{c}_1^T \ \dots \ \underline{c}_{d_f}^T]^T \leq \underline{u}. \quad (3.42)$$

3.2.3 Ausgewählte Methoden zur Knoten- und Parameterstellenwahl

Wenn ein Hermite-Interpolationsproblem gemäß 3.2.2 gegeben ist, ohne dass bereits ein Knotenvektor $\underline{\lambda}$ festgelegt ist, so gibt es eine Reihe von Methoden, einen Knotenvektor so zu definieren, dass die Schoenberg-Whitney-Bedingungen nach Gl. 3.35 erfüllt sind und somit eine eindeutige Lösung für das Interpolationsproblem gegeben ist.

Sei p der Grad, die Zahl d_f an Freiheitsgraden, und seien $d_f + 1$ Parameterstellen u_j , $j = 0, \dots, d_f$ gegeben. Da nur eingespannte Knotenvektoren betrachtet werden, gilt $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = u_0$ und $\lambda_{d_f} = \lambda_{d_f+1} = \dots = \lambda_{d_f+p} = u_{d_f}$. Es werden folgende zwei Methoden erwähnt, die restlichen $d_f - p - 1$ Knoten festzulegen:

a) Dierckx-Methode: Mit

$$\hat{d}_a = \begin{cases} 0, & \text{falls } d_a > 0, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sind die inneren Knoten durch:

$$\lambda_j = u_{j-\hat{d}_a-\lceil \frac{p}{2} \rceil}, \quad j = p+1, \dots, d_f-1 \quad (3.43)$$

gegeben. Diese Methode wird in den Routinen, die Dierckx (1993) beigefügt sind, zur Interpolation verwendet. Das in dieser Arbeit genutzte Software-Paket MoCurveJoint von Tändl (2009) baut auf diesen Routinen auf und verwendet diese Knotenwahl. In Piegl und Tiller (1997) wird diese Methode unter der Bezeichnung *Lokale Kurvenanpassung* verwendet.

b) AVG-Methode (Mittelwert-Methode):

$$\lambda_j = \frac{1}{p} \sum_{i=j-p+1}^j u_i. \quad (3.44)$$

Dies ist eine der gebräuchlichsten „einfachen“ Methoden zur Knotenbestimmung für sogenannte *globale Interpolationsprobleme* nach Piegl und Tiller (1997).

Mit der Wahl der Knoten zu Parameterstellenverteilungen wird die Wahl getroffen, wo polynomielle Segmente zur Interpolation zwischen den Stützstellen zusammengefügt werden. Falls diesen Orte eine (physikalische) Bedeutung gegeben werden kann, sollte die entsprechende Methode benutzt werden.

Soll eine B-Splinekurve $\underline{r}(u)$ bestimmt werden, die durch eine gegebene Menge Punkte \underline{p}_j , $j = 0, \dots, d_f$ läuft und diese Aufgabe möglichst „glatt“ bzw. „gutartig“ erfüllt, so nennt man dies ein *globales Kurvenanpassungsproblem*. In der Literatur, siehe insbesondere Piegl und Tiller (1997), wird die Lösung eines solchen Problems in drei Schritten beschrieben:

- 1) Zuordnung von Parameterstellen u_j zu den Punkten \underline{p}_j , $j = 0, \dots, d_f$.
- 2) Wahl eines Grades p der Splinekurve und eines Knotenvektors λ der Länge $d_f + p$, der mit den u_j die Schoenberg-Whitney-Bedingungen erfüllt.
- 3) Lösung des linearen Problems Gl. 3.39.

In dieser Arbeit wird der Grad p nur nach dem Gesichtspunkt der benötigten minimalen Stetigkeitsbedingung $\underline{r}(u) \in \mathcal{C}^{p-1}$ gewählt. Da die Schritte 2) und 3) nach Wahl einer Knotenbestimmungsmethode a) oder b) eindeutig gegeben sind, verbleibt zur Lösung des globalen Kurvenanpassungsproblems nur Schritt 1). Die gebräuchlichsten Methoden dazu sind:

- a) Gleichverteilung der Parameterstellen, siehe Piegl und Tiller (1997):

$$u_j = \frac{j}{d_f - 1}, \quad (3.45)$$

- b) die Sehnenlängenmethode, siehe Piegl und Tiller (1997):

$$u_j = \sum_{i=1}^j \|\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}\|, \quad (3.46)$$

sowie:

- c) Die Verallgemeinerte Zentripetalmethode, siehe Hoschek und Lasser (1993):

$$u_j = \sum_{i=1}^j \|\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}\|^{\frac{1}{a}}, \text{ für ein } a \in \mathbb{N} \text{ mit } a > 1. \quad (3.47)$$

Methode a) ist die historisch früheste und hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt, da sie sehr stark oszillierende Kurven erzeugen kann. Die Methode b) wird vor allem dann empfohlen, wenn die Sehnenlängen $\|\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}\|$ von vergleichbarer Länge sind, da sie dann zu einer uniformen, gutartigen Parametrisierung und einer glatten Kurve $\underline{r}(u)$ führt. Methode c) kommt dann zum Einsatz, wenn es Bereiche der Kurve gibt, an denen sich Stützpunkte

häufen und die Kurve stark *gekrümmt* werden muss, um durch die Punkte fahren zu können. Dann vermeidet diese Methode oszillierendes Verhalten in Bereichen mit vielen Stützpunkten, die sogenannte *Überanpassung*. Für eine Analyse dieser drei Sachverhalte sei auf Hoschek und Lasser (1993) und Pieggl und Tiller (1997) verwiesen.

Tändl (2009) empfiehlt die Sehnenlängenmethode b) zur Lösung des globalen Kurvenanpassungsproblems. Die Sehnenlängenmethode wird in leicht modifizierter Form auch in der vorliegenden Arbeit benutzt, und die Splinekurven werden durch ein Hermite-Interpolationsproblem ermittelt. Dies wird für den vorliegenden Anwendungsfall näher in Kapitel 4 erläutert.

3.3 Ermittlung von Splinekurven durch Optimierung

Neben der Ermittlung von Splinekurven durch Interpolation existieren in der Literatur auch alternative Methoden, die den Splineverlauf aus der Lösung eines Optimierungsproblems definieren. Drei wichtige Repräsentanten dieses Ansatzes sind die allgemeine minimale Energiemethode nach Celniker und Gossard (1991), der Optimalitätsansatz für die Splinekurveninterpolation durch Vassilev (1996), sowie die sequentielle-quadratische-Programmierung (SQP-Methode) zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme der Splinevorgabe mit Nebenbedingungen.

3.3.1 Minimale Energie-Methode nach Celniker und Gossard

Die Idee, ein Energiefunktional unter bestimmten Nebenbedingungen zu minimieren, um glatte bzw. glattere Splinekurven zu erzeugen, wurde zuerst von Schweikert (1965) für einen sogenannten exponentiellen Spline unter Spannung umgesetzt. Hier wird die von Celniker und Gossard (1991) eingeführte Formulierung eines allgemeinen Energiefunktional für ein *deformierbares Modell* wiedergegeben. Am angegebenen Ort wird ein Energiefunktional

$$E = \int_a^b w_1(u) \cdot \underline{r}'(u)^2 + w_2(u) \cdot \underline{r}''(u)^2 - 2\underline{f}(u)^T \cdot \underline{r}(u) du \quad (3.48)$$

für eine Kurve

$$\underline{r}(u) = \sum_{i=0}^{d_f} \underline{q}_i \phi_i(u), \quad (3.49)$$

durch noch näher zu bestimmende Formfunktionen (Basisfunktionen) $\phi_i(u)$ und dreidimensionale Koeffizienten \underline{q}_i definiert. Dabei haben die Teile des Funktional in Gl. 3.48 folgende Bedeutungen:

- $w_1(u) \cdot \underline{r}'(u)^2$: Term der Längenänderung mit Steifigkeitsverteilung w_1 ,
- $w_2(u) \cdot \underline{r}''(u)^2$: Term der Krümmung mit Steifigkeitsverteilung w_2 ,
- $2\underline{f}(u)^T \cdot \underline{r}(u)$: Lokale Belastung der Kurve durch Kraftvektor $\underline{f}(u)$.

Vassilev (1996) wendete dieses Prinzip auf Splinekurven-Interpolationsprobleme an, indem er die Hermite-Interpolationsbedingungen Gl. 3.37 in feste Bedingungen $\underline{r}(u_i) = \underline{p}_i$, $i = 0, \dots, d$ und freie, zusätzliche Punkte $\underline{r}(u_{j,f}) = \underline{p}_{j,f}$, $j = 1, \dots, m$ aufteilt. Die Lage der freien Punkte $\underline{p}_f = [\underline{p}_{1,f}^T, \dots, \underline{p}_{m,f}^T]$ interpretiert er als Designparameter des vereinfachten Energiefunktional

$$\arg \min_{\underline{p}_f} E_{\underline{p}_f} = \int_a^b w_1 \underline{r}'(u)^2 + w_2 \underline{r}''(u)^2 du, \quad (3.50)$$

wobei $\underline{r}(u)$ durch Lösung des Problems gemäß Gl. 3.39 gegeben ist. Vassilev zeigt, dass die Lösung von Gl. 3.50 zu einem quadratischen Problem

$$\min_{\underline{p}_f} \underline{p}^T \mathbf{K} \underline{p} \quad (3.51)$$

führt, wobei $\underline{p} = [\underline{p}_0^T, \dots, \underline{p}_d^T, \underline{p}_{1,f}^T, \dots, \underline{p}_{m,f}^T]$ die festen und freien Parameterstellen sind und \mathbf{K} die positiv-definite Gewichtungsmatrix. Die Lösung dieses Problems hat die Eigenschaft, dass die Splinekurve so kurz und wenig gekrümmt wie möglich unter Beibehaltung der festen Bedingungen für die $\underline{r}(u_i)$ ist. In der Literatur wird dieser Ansatz als „fair interpolation“ bezeichnet, zu Deutsch in etwa „gutartige Kurvenanpassung“. Es sei erwähnt, dass von den in Abschnitt 3.1 definierten intrinsischen Koordinaten nur die Krümmungen $\beta(s)$ und $\gamma(s)$ der Kurve $\underline{r}(s)$ Entsprechungen in diesem Optimierungsverfahren haben. In dieser Arbeit wird aber auch die Windung $\alpha(s)$ eines Streifens \mathcal{S} in ein Optimierungsverfahren einbezogen, so dass eine erweiterte Methode benötigt wird.

3.3.2 Lösung isoperimetrischer Probleme durch sequentielle quadratische Programmierung

In den Verfahren des vorangegangenen Abschnittes sind die Längen der Splinekurven veränderliche Größen. Ist gewünscht, dass die Segmente des Splines ihre Länge nicht verändern,

so kann man den Term $w_1(u) \cdot \underline{r}'(u)^2$ des Energiefunktional durch d_f Nebenbedingungen der Form $\int_a^{u_i} \|\underline{r}'(u)\| du = \ell_i, i = 1, \dots, d_f$, ersetzen. Optimierungsprobleme mit solchen Nebenbedingungen nennt man *isoperimetrische Probleme*. Sie sind aufgrund der ausgeprägten Nichtlinearität der Längenbedingungen schwierig zu lösen. Ein allgemeines Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen ist durch die sequentielle quadratische Programmierung (SQP) gegeben, welches hier gemäß Nocedal und Wright (1999) kurz zusammengefaßt wird. Dabei steht die Implementierung gemäß der in dieser Arbeit verwendeten Programmbibliothek NPSOL, siehe Powell (1982) und Gill u. a. (1998), im Vordergrund. Dazu werden zunächst einige Grundkonzepte der gradientenbasierten Optimierung eingeführt.

In der Regel betrachtet man nichtlineare Optimierungsprobleme (NP) in der Normalform:

$$\min_{\underline{x}} f(\underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.52)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$c_i(\underline{x}) = 0, i \in \mathcal{E}, \quad (3.53)$$

$$c_j(\underline{x}) \geq 0, j \in \mathcal{I}, \quad (3.54)$$

wobei \mathcal{E} und \mathcal{I} endliche Mengen von Indizes für die zweiseitigen und einseitigen Nebenbedingungen sind. Die Funktion f heißt *Zielfunktion* oder *Kostenfunktion*. Die *zulässigen Lösungen* sind die Punkte \underline{x} , so dass die Nebenbedingungen Gl. 3.53, Gl. 3.54 erfüllt sind. Die Menge der zulässigen Lösungen sei mit Ω bezeichnet. Eine zulässige Lösung \underline{x}^* heißt *strikte lokale Lösung*, falls es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von \underline{x}^* gibt, so dass gilt:

$$\underline{x} \in U, \underline{x} \neq \underline{x}^* \Rightarrow f(\underline{x}) > f(\underline{x}^*). \quad (3.55)$$

Gradientenbasierte Verfahren zur Bestimmung einer strikten lokalen Lösung \underline{x}^* kommen infrage, wenn f und die c_i in hinreichend großer Umgebung von \underline{x}^* mindestens einmal stetig differenzierbar. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass f und die c_i , wo definiert, von der Klasse \mathcal{C}^2 , also zwei Mal stetig differenzierbar sind. Basis der Theorie der gradientenbasierten Verfahren ist die *Lagrange-Funktion*:

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\mu}) := f(\underline{x}) - \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \mu_i \cdot c_i(\underline{x}). \quad (3.56)$$

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein lokales Optimum \underline{x}^* , auch Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT) genannt, sind:

$$\nabla_{\underline{x}} \mathcal{L}(\underline{x}^*, \underline{\mu}) = \nabla f(\underline{x}^*) - \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \mu_i \cdot \nabla c_i(\underline{x}^*) = 0, \quad (3.57)$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \quad (3.58)$$

$$\mu_i c_i(\underline{x}^*) = 0, \quad (3.59)$$

$$\underline{x}^* \in \Omega, \quad (3.60)$$

worin $\underline{\mu}$ die sogenannten *Lagrange-Multiplikatoren* darstellen. Die \underline{x}^* , die die KKT-Bedingungen erfüllen, nennt man Kuhn-Tucker-Punkte. Ist $c_i(\underline{x}^*) = 0$, so heißt c_i aktiv. Die Bedingung der *strikten Komplementarität* besagt, dass immer eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\mu_i = 0 \Leftrightarrow c_i > 0, \quad (3.61)$$

$$\mu_i > 0 \Leftrightarrow c_i = 0. \quad (3.62)$$

Sei \mathbf{A} die Matrix der Gradienten der aktiven Bedingungen $\nabla c_i(\underline{x}^*)$ und \mathbf{Z} das orthogonale Komplement von \mathbf{A} , d.h. $\mathbf{AZ} = 0$. Die Spalten von \mathbf{Z} sind dann eine Basis des Vektorraums von linearen Richtungen, die die aktiven Bedingungen in erster Ordnung nicht verletzen. Dann ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass ein Kuhn-Tucker-Punkt \underline{x}^* ein lokales Minimum ist, dass die sogenannte *projizierte Hessesche der Lagrange-Funktion*, $\mathbf{Z}^T \nabla_{\underline{x}, \underline{x}} \mathcal{L}(\underline{x}^*, \underline{\mu}) \mathbf{Z}$ positiv-definit ist.

Seien in einem Iterationsschritt k , \underline{x}_k und $\underline{\mu}_k$ als Schätzwert für \underline{x}^* und $\underline{\mu}$ sowie eine positiv-definite Näherung \mathbf{H}_k für $\nabla_{\underline{x}, \underline{x}} \mathcal{L}(\underline{x}_k, \underline{\mu}_k)$ gegeben. Weiterhin seien die Linearisierungen der aktiven Bedingungen, $c_i(\underline{x}_k + \underline{d}) \approx c_i(\underline{x}_k) + \nabla c_i^T \underline{d}$ gegeben. Dann ist die *Suchrichtung* \underline{p}_k gegeben als die Lösung des quadratischen Unterproblems

$$\min_{\underline{p}} \left\{ f(\underline{x}_k) + \nabla f(\underline{x}_k)^T \underline{p} + \frac{1}{2} \underline{p}^T \mathbf{H}_k \underline{p} \right\} \quad (3.63)$$

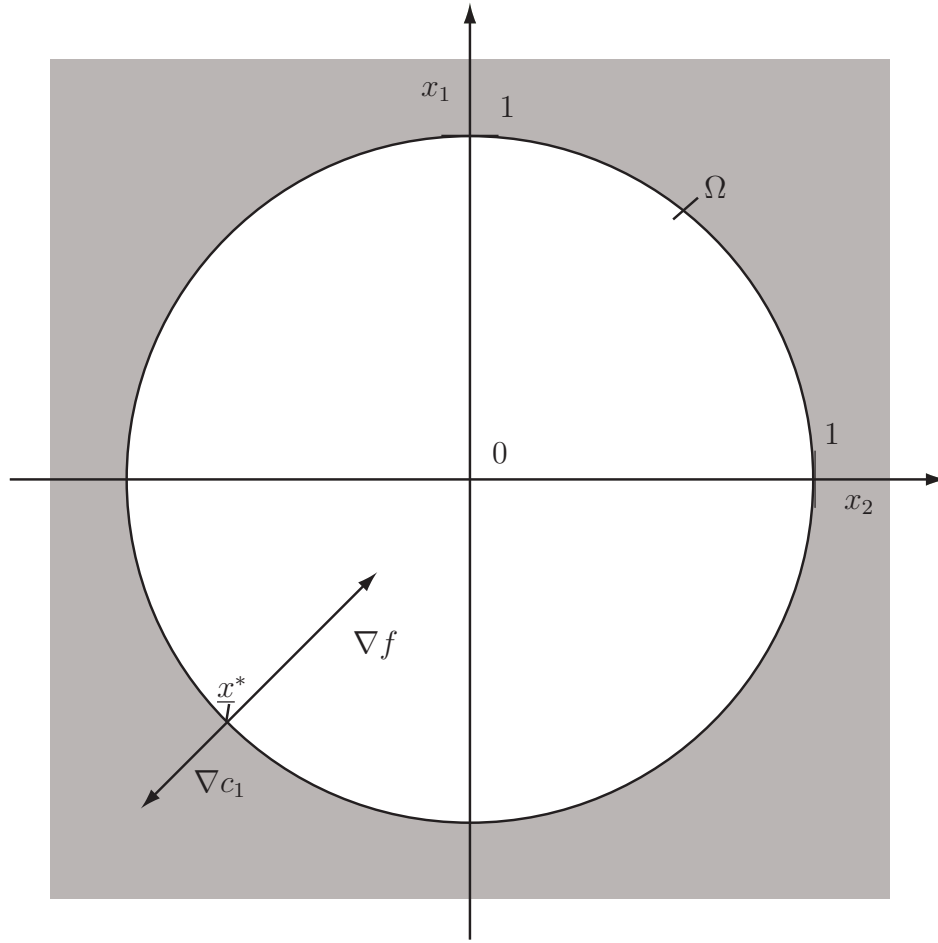


Abbildung 3.8: Optimierungsproblem $\min_{\underline{x}} f = x_1 + x_2$, N.B. $c_1 = 2 - (x_1^2 + x_2^2) \geq 0$, strikte Lösung \underline{x}^* , Gradient von f und c_1 .

unter den Nebenbedingungen:

$$c_i(\underline{x}_k) + \nabla c_i^T \underline{p} = 0, \quad c_i \text{ aktiv.} \quad (3.64)$$

Dieses quadratische Unterproblem entspricht einer Näherung zweiter Ordnung des Problems aus Gl. 3.52 mit linearisierten Nebenbedingungen. Es hat eine eindeutige Lösung, wenn die linearisierten aktiven Bedingungen kompatibel sind; ansonsten existiert keine Lösung und das Verfahren bricht ab. Im Fall von kompatiblen Bindungsgleichungen wird für die Suchrichtung \underline{p}_k ein Liniensuchverfahren durchgeführt, indem ein Parameter $0 < \alpha \leq 1$ ermittelt wird, welcher das eindimensionale Problem

$$F(\underline{x} + \alpha \cdot \underline{p}_k, \underline{\mu}_k, \underline{\rho}_k, \underline{s}_k) \ll F(\underline{x}, \underline{\mu}_k, \underline{\rho}_k, \underline{s}_k) \quad (3.65)$$

mit einer in \underline{x} positiv-definiten Funktion $F(\underline{x}, \underline{\mu}, \underline{\rho}, \underline{s})$ löst.

Die nächste Näherung \underline{x}_{k+1} ist dann gegeben durch $\underline{x}_{k+1} := \underline{x}_k + \alpha \underline{p}_k$. Falls diese Folge gegen einen Kuhn-Tucker-Punkt konvergiert, wird die Iteration beendet, ansonsten wird im neuen Punkt $\underline{x}_{k+1}, \underline{\mu}_{k+1}$ die Iteration fortgesetzt.

In NPSOL wird für die F die *erweiterte Lagrange'sche Gütefunktion*

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\mu}, \underline{\rho}, \underline{s}) = f(\underline{x}) - \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \mu_i \cdot (c_i(\underline{x}) - s_i) + \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \rho_i \cdot (c_i(\underline{x}) - s_i)^2 \quad (3.66)$$

verwendet. Dies entspricht einem Kompromiss aus dem Bestreben, die Nebenbedingungen (weiterhin) zu erfüllen und dennoch die Zielfunktion zu verkleinern. Die Parameter $\underline{\rho}_k, \underline{s}_k$ dieser Suche und $\underline{\mu}_k$ werden in NPSOL nach expliziten Formeln bestimmt, siehe Gill u. a. (1998). Der Schätzwert für die Hessesche der Lagrange-funktion \mathbf{H}_{k+1} wird in NPSOL nach dem Quasi-Newton-Update nach Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno (BFGS) gemäß

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k - \frac{1}{\underline{s}^T \mathbf{H}_k \underline{s}} \mathbf{H}_k \underline{s} \underline{s}^T \mathbf{H}_k + \frac{1}{\underline{y}^T \underline{s}} \underline{y} \underline{y}^T, \quad (3.67)$$

bestimmt, wo $\underline{s} = \alpha \cdot \underline{p}_k$ und \underline{y} eine Schätzung der Differenz $\nabla \mathcal{L}(\underline{x}_{k+1}, \underline{\mu}_{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(\underline{x}_k, \underline{\mu}_k)$ des Gradienten der Lagrange'schen Gütefunktion ist, die bei Bedarf so modifiziert wird, dass \mathbf{H}_{k+1} positiv-definit bleibt. Dieses Verfahren konvergiert fast sicher zu einer lokalen Lösung \underline{x}^* , falls:

1. Die Folge der \underline{x}_k konvergiert,
2. Die Konditionszahl der \mathbf{H}_k beschränkt ist,
3. Die Schrittweite α (schnell) gegen 1 konvergiert und
4. Der *reduzierte Gradient* $\mathbf{Z}^T \nabla f(\underline{x}_k)$ gegen 0 konvergiert.

Die Bedingungen 1) und 4) sind dabei die Konvergenzbedingungen des Verfahrens. Die Bedingungen 2) und 3) werden nach Beendigung der Iteration separat überprüft. Falls die Gradienten der Zielfunktion und Nebenbedingungen nicht explizit gegeben sind, werden in NPSOL Schätzwerte durch finite Differenzen errechnet.

Im folgenden Kapitel wird dargelegt, wie die hier beschriebenen mathematischen Objekte und Methoden genutzt werden können, um die Wirbelsäulenlinie aus gemessenen Hautmarkpositionen zu schätzen.

4 Symbolisches Wirbelsäulenmodell

In diesem Kapitel wird eine neue Methode der Splineanpassung zur Rekonstruktion der Wirbelsäulenlinie aus gemessenen Positionen von Hautmarkern erläutert, die den Hauptbeitrag dieser Arbeit darstellt. Kernstück dieser Methode ist die Verallgemeinerung der posterioren Wirbellinie zu einem symbolischen Modell der Wirbelsäule als deformierbare Raumkurve, entlang derer und um die die Hautmarker frei gleiten können, sowie die Erweiterung der Raumkurve zu einem Streifen, mit dem die natürlichen Biegesteifigkeiten der Wirbelsäule nachgebildet werden können. Die gesuchte Raumkurve bzw. Splinefunktion ergibt sich dann aus einem Optimierungsproblem, in dem die Hautartefakte weitgehend automatisch „herausgefiltert“ sind. Es wird davon ausgegangen, dass alle erwähnten Größen und Parameter sinnvoll definiert oder gemessen wurden. Methoden zur Bestimmung dieser Parameter und die Anwendung des Verfahrens auf experimentelle Daten werden im Kapitel 5 besprochen.

4.1 Mathematisches Modell der posterioren Wirbellinie

4.1.1 Verallgemeinerte posteriore Wirbellinie und Interpolation

Die posteriore Wirbellinie (*posterior vertebral line*, PVL), die in Kapitel 2 erwähnt wurde, ist in der Literatur als Referenzlinie in zweidimensionalen radiologischen Aufnahmen als Verbindung der Zentren der Wirbelkörperhinterwände gegeben, den sogenannten lateralen oder Antero-Posterior Radiographen der Wirbelsäule, vgl. Daffner u. a. (1987) sowie Putto und Tallroth (1990). Physiologiegemäß ist eine makroskopisch glatte, gleichmäßig gekrümmte PVL, siehe Dvorak u. a. (1993) und Grob u. a. (2007). Starke Krümmung einzelner FSUs in Flexion/Extension oder lateraler Beugung der Wirbelsäule zeigen eine abnorme Funktion an, die sogenannte zervikale Hypermobilität bzw. lumbare Instabilität, siehe dazu Pitkänen und Manninen (1994), Pitkänen u. a. (2002) sowie Alqarni u. a. (2011).

Zur dreidimensionalen Definition der posterioren Wirbellinie wird an jedem Wirbel das sogenannte Wirbelmauerzentrum (WMZ) als Schnittpunkt der mittleren Transversalebene, der Sagittalebene und der tangentialen Ebene an der Rückseite des Wirbelkörpers (der dorsalen Wirbelkörperwand) definiert, vgl. siehe Bild 4.1. Am Sakrumpodest wird der entsprechende Referenzpunkt aus praktischen Gründen mit der Basis ossis sacri in der mittleren Transversalebene definiert. Als Sagittalebene wird im Normalfall die Symmetrieebene des Wirbelkörpers definiert; im Falle von verformten Wirbeln wird die Sagittalebene durch die Spitze des hinteren Dornfortsatzes und die Mitte der Vorderwand des Wirbelkörpers definiert, vgl. Au-

bin u. a. (1997) und Štern u. a. (2011). Die mittlere Transversalebene ist parallel zur oberen Endplatte eines Wirbelkörpers und verläuft durch dessen Zentrum, siehe a.a.O. Als orthonormales Koordinatensystem in den WMZ werden die klinischen Achsen Superior (x-Achse) als Schnitt von Sagittalebene und tangentialer Ebene der Wirbelkörperwand, sowie Anterior (y-Achse) in der Sagittalebene orthogonal zu superior nach vorne orientiert. Die laterale Achse (z-Richtung) wird senkrecht zur Sagittalebene nach links orientiert.

Alle anatomischen Beschreibungen korrespondieren im Folgenden zu einer einzelnen, konkreten Zielperson (asymptomatisch, männlich, 41 Jahre, Gewicht: 79 Kg, Größe 1,90 m, radiologische Untersuchung ohne Befund). Als Referenz wird hierbei die suppine, neutrale Lage genutzt, die als anatomische neutrale Lage aufgefaßt wird und mithilfe radiologischer Untersuchungen im Magnetresonanztomographen (MRT) sehr genau vermessen werden kann. Startpunkt für die PVL ist Wirbel V_0 als Basis ossis sacri; dazu wird das sakrumfeste Koordinatensystem \mathcal{K}_2^0 eingeführt, dessen Ursprung \underline{r}_0 im Basis ossis sacri liegt, mit Rotationsmatrix $\mathbf{R}_2 = [\underline{e}_x^0, \underline{e}_y^0, \underline{e}_z^0]$ an den lokalen Achsen Superior, Anterior und Lateral des Sakrumpodest ausgerichtet, siehe Bild 4.2.

Die PVL ergibt sich dann als Verbindungslinie zu den Wirbelmauerzentren der 25 beweglichen Wirbel V_i mit den Indizes:

- Lumbarsegment L5-L1: $i = 1, \dots, 5$,
- Thoraxsegment Th12-Th1: $i = 6, \dots, 17$ und
- Zervikalsegment C7-C1: $i = 18, \dots, 25$,

jeweils in Richtung von kaudal zu kranial (aufwärts) aufsteigend notiert. Das Wirbelmauerzentrum zu V_i wird mit \underline{r}_i notiert. Entsprechend wird das Wirbelmauerzentrum der Wirbel V_i zu einem Koordinatensystem \mathcal{K}_2^i erweitert, mit Ursprung in \underline{r}_i und Rotationsmatrix $\mathbf{R}_2 = [\underline{e}_x^i, \underline{e}_y^i, \underline{e}_z^i]$

Die lokalen klinischen Ebenen des Wirbelkörpers V_i (siehe Bild 4.2) sind dann definiert als:

- Lokale Sagittale: Ursprung in \underline{r}_i , Flächennormale ist die laterale Achse \underline{e}_z^i ,
- Lokale Frontale: Ursprung in \underline{r}_i , Flächennormale ist die anteriore Achse \underline{e}_y^i ,
- Lokale Transversale: Ursprung in \underline{r}_i , Flächennormale ist die superiore Achse \underline{e}_x^i .

Die Basis ossis sacri ist starr mit dem Becken verbunden, so dass die lokale Sagittale des Wirbelkörpers V_0 mit der Sagittale des Beckens identifiziert wird. Es stehen Methoden bereit, die

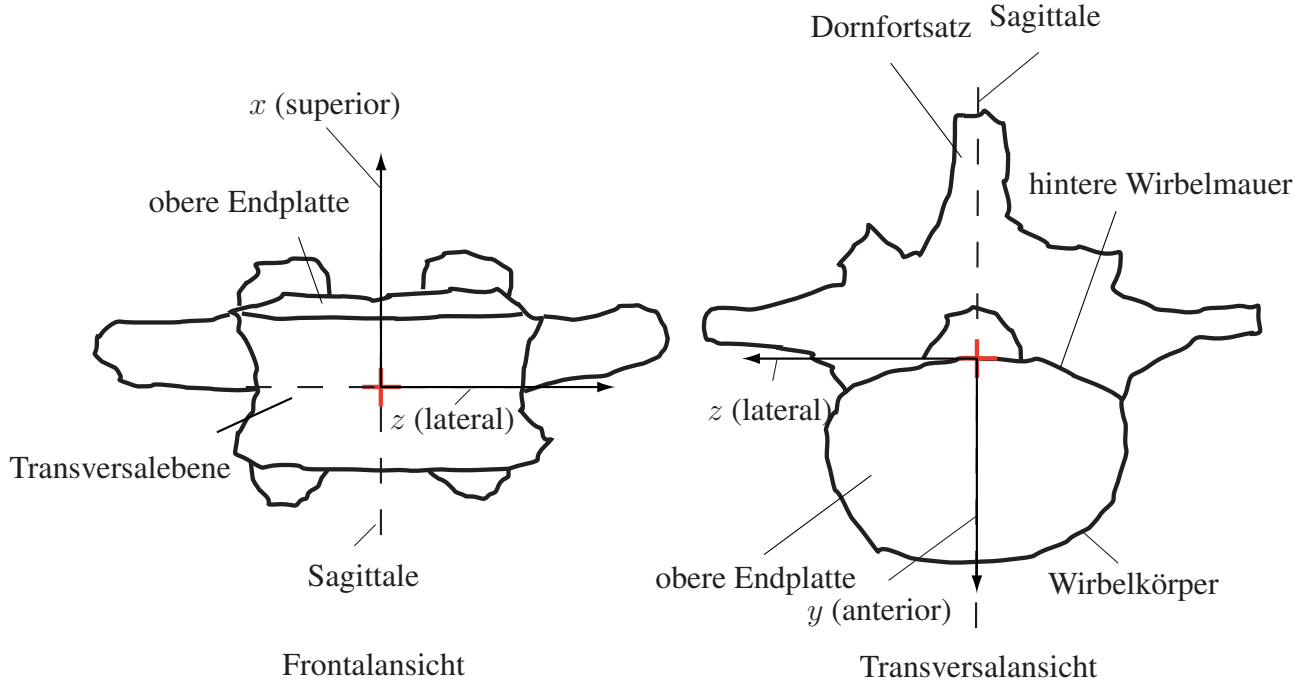


Abbildung 4.1: Lokales Koordinatensystem. Rot: Wirbelmauerzentrum

Lage und Orientierung des Beckens aus gemessenen Markerpositionen zu bestimmen, siehe Davis III u. a. (1991) und Whittle (2007). Daher wird im folgenden die Lage des Beckens und die Ausrichtung der Basis ossis sacri, \mathcal{K}_2^0 als bekannt vorausgesetzt. Die laterale Achse \underline{e}_z^0 wird Beckenlaterale genannt.

Um ein deformierbares Kurvenelement als Modell der PVL zu definieren, wird das globale Kurvenanpassungsproblem aus Abschnitt 3.2.3 an die Wirbelmauerzentren nach folgendem Schema gelöst:

- 1) Kurvenfester Ursprung $\underline{p}_{0,0} = \underline{r}_0$ ist in \mathcal{K}_2^0 mit Anfangstangente Superior, $\underline{t}_0 = \underline{e}_x$.
- 2) Die weiteren Stützpunkte sind die Wirbelmauerzentren $\underline{p}_{j,0}$ von mindestens vier zu definierenden Modellwirbeln

$$\hat{V}_j \subseteq V_1, \dots, V_{25}, j = 1, \dots, n, n \geq 4, \quad (4.1)$$

mit n als Anzahl der Modellwirbel.

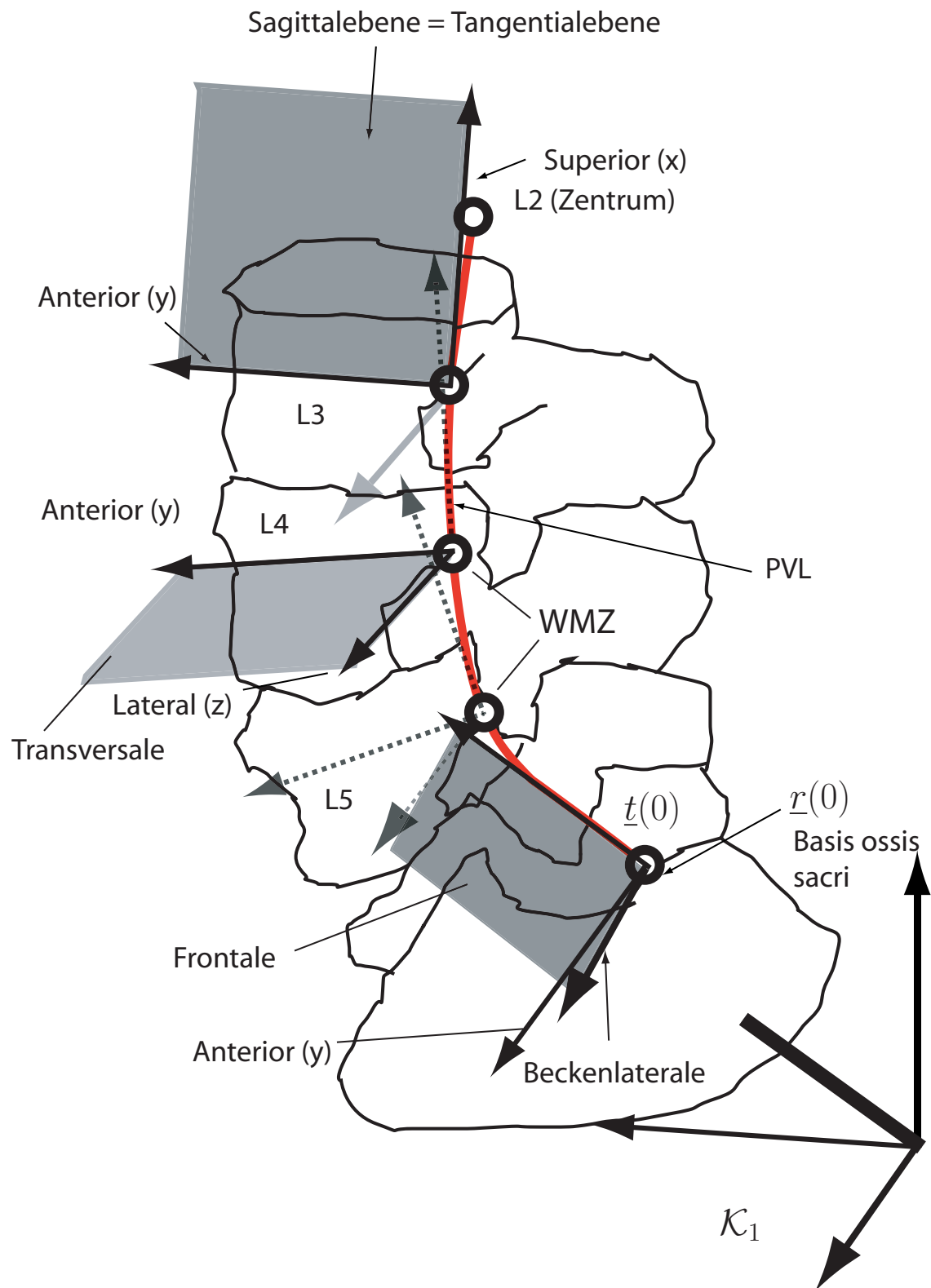


Abbildung 4.2: PVL in allgemeiner Lage

- 3) Der Parametervektor für das Interpolationsproblem \underline{u}_0 wird mit der Sehnenlängenmethode durch die Stützpunkte und die zwei gegebenen Anfangsbedingungen $\underline{r}_0, \underline{t}_0$ definiert:

$$u_{0,0} = u_{1,0} = 0, \quad u_{i+1,0} = \sum_{j=2}^i ||\underline{p}_{j,0} - \underline{p}_{j-1,0}||, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

- 3) Der eingespannte Knotenvektor $\underline{\lambda}_0$ wird mithilfe des Grad $p = 5$ und der Dierckx-Methode aus dem Parametervektor \underline{u}_0 bestimmt:

$$\lambda_{0,0} = \lambda_{1,0} = \dots = \lambda_{5,0} = 0 \quad (4.3)$$

$$\lambda_{j,0} = u_{j-3,0}, \quad j = 6, \dots, n+1 \quad (4.4)$$

$$\lambda_{n+2,0} = \lambda_{n+3,0} = \dots = \lambda_{n+6,0} = u_{n+1,0}. \quad (4.5)$$

- 4) Das *interpolierende Kurvenmodell* in neutraler Haltung ist definiert als die eindeutige quintische B-Splinekurve

$$\underline{r}_0(u) = \sum_{j=0}^{n+1} \underline{c}_{j,0} N_{j,5}, \quad (4.6)$$

mit den normalisierten Basis-Splines $N_{j,5}$ zu $\underline{\lambda}_0$, die das folgende Hermite-Interpolationsproblem löst:

$$\underline{r}_0(0)' = \underline{t}_0, \quad (4.7)$$

$$\underline{r}_0(u_{0,0}) = \underline{r}_0, \quad (4.8)$$

$$\underline{r}_0(u_{j,0}) = \underline{p}_{j,0}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.9)$$

d.h. explizit,

$$[\underline{c}_{0,0}^T \underline{c}_{1,0}^T \dots \underline{c}_{n+1,0}^T]^T = \mathbf{E}_0^{-1} [\underline{t}_0^T \underline{r}_0, \underline{p}_{1,0}^T \dots \underline{p}_{n,0}^T]^T, \quad (4.10)$$

mit der Kollokationsmatrix \mathbf{E}_0 , die zeilenweise gemäß Gl. 3.37 und Gl. 3.38 für diesen Knotenvektor, Parametervektor und zwei Anfangsbedingungen definiert ist.

- 5) Die Schätzung für die PVL in allgemeiner (bewegter) Lage $\underline{r}(u)$ für die Zielperson ist nun definiert als

$$\underline{r}(u) = \sum_{j=0}^{n+1} \underline{c}_j N_{j,5}, \quad (4.11)$$

mit

$$[\underline{c}_0^T \ \underline{c}_1^T \ \dots \ \underline{c}_{n+1}^T]^T = \mathbf{E}_0^{-1} [\underline{t}_0^T \ \underline{r}_0^T, \ \underline{p}_1^T, \ \dots, \ \underline{p}_n^T]^T, \quad (4.12)$$

mit den normalisierten Basis-Splines $N_{j,5}$ zu $\underline{\lambda}_0$, worin $\underline{p}_i, i = 1, \dots, n$ die geschätzten Positionen der hinteren Wirbelmauerzentren der Modellwirbel in der bewegten Lage bezeichnet, vgl. Bild 4.2.

Man bemerkt, dass auf diese Weise eine natürliche Parametrisierung der Kurve $\underline{r}_0(u)$ durch die Position der hinteren Wirbelmauerzentren ausgewählter Wirbel in neutraler Lage gegeben ist. Da die Segmentlängen bei geeigneter Wahl der Modellwirbel von vergleichbarer Länge sind, ist damit die Wahl der Sehnenlängenmethode zur Parameterbestimmung für die praktische Berechnung der PVL von Nutzen, vgl. Abschnitt 3.2.3. Das deformierbare Kurvenmodell $\underline{r}(u)$ wird im folgenden mit *interpolierender PVL* (i-PVL) bezeichnet. Der $3 \cdot n$ -dimensionale Vektor

$$\underline{x} = [\underline{p}_1^T, \ \dots \ \underline{p}_n^T]^T \quad (4.13)$$

wird der *Designvektor* der i-PVL $\underline{r}(u)$ genannt. Dieser parametrisiert die *Kandidatenkurven* für die Bestimmung der Wirbelsäulenlinie aus gemessenen Markerpositionen. Die spezielle i-PVL in neutraler Haltung $\underline{r}_0(u)$ ist durch den Designvektor

$$\underline{x}_0 = [\underline{c}_{1,0}^T \ \dots \ \underline{c}_{n+1,0}^T]^T \quad (4.14)$$

definiert. Durch die feste Wahl der Anfangsbedingungen \underline{t}_0 und \underline{r}_0 sind alle Kandidatenkurven fest mit der Basis ossis sacri verbunden, mit fester Ausrichtung an der PVL in der neutralen Haltung, d.h. die Kandidatenkurven schmiegen sich anatomisch exakt an den Anfangspunkt der PVL, wie in Bild 4.2 zu erkennen ist.

4.1.2 Festlegung der Darboux-Tetrahedra

Im folgenden wird die Parametrisierung der i-PVL $\underline{r}(u)$ zu einem Designvektor \underline{x} nach dem Bogenlängenparameter s mit $\underline{r}(s)$ notiert, die der speziellen i-PVL entsprechend mit $\underline{r}_0(s)$. Die Kandidatenkurve i-PVL wird so zu einem Streifen mithilfe eines Darboux-Dreibein erweitert, dass die definierten Krümmungsinvarianten in neutraler Haltung als anatomische Größen interpretiert werden können. Damit dieses geometrische Modell für die Bestimmung

der Zielkurve aus gemessenen Hautmarkerpositionen genutzt werden kann, werden einige vereinfachte Modellannahmen getroffen, die in diesem und dem folgenden Abschnitt erläutert werden.

Zunächst wird angenommen, dass die Zielperson keine pathologischen Veränderungen der Wirbelsäule hinsichtlich

- a) abnormer Krümmung der Wirbelsäule in der Frontalebene (Skoliose),
- b) abnormer Krümmung der Wirbelsäule in der Sagittalen (Hyperlordose, Hyperkyphose) oder
- c) Bewegungseinschränkungen einzelner FSUs (wie Bandscheibenvorfall, zervikale Hypermobilität oder lumbare Instabilität, o. Ä.).

Es wird angenommen, dass damit eine stabile, gleichmäßig gekrümmte PVL für Flexion/Extension und Lateralbeugung innerhalb der neutralen Zone der FSUs gegeben ist.

Unter diesen Annahmen sind die Wirbelkörper, Kopf, Thorax und Becken in idealer neutraler Haltung entlang der globalen Sagittalen ausgerichtet und ihre lokalen Sagittalen sind parallel zur globalen Sagittalen; damit ist die Flächennormale der lokalen Sagittalen in der neutralen Haltung durch die Beckenlaterale \underline{e}_z^0 gegeben, siehe dazu Bild 4.3, oben. Die i-PVL $\underline{r}(s)$ wird zum Streifen erweitert durch das *sakrumparallele Darboux-Dreibein*

$$\mathcal{K}_2(s) = \{\underline{r}(s), [\underline{t}(s), \underline{b}(s), \underline{n}(s)]\} \quad (4.15)$$

erweitert durch den *konstanten Horizontvektor* \underline{e}_z^0 , d.h.

$$\underline{t}(s) = \underline{r}'(s), \quad (4.16)$$

$$\lambda(s) = \|\underline{e}_z^0 \times \underline{t}(s)\|, \quad (4.17)$$

$$\underline{b}(s) = \frac{\underline{e}_z^0 \times \underline{t}(s)}{\lambda(s)}, \quad (4.18)$$

$$\underline{n}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{b}(s). \quad (4.19)$$

Für die allgemeine i-PVL $\underline{r}(s)$ definiert $\underline{n}(s)$ als geschätzte laterale Achse die geschätzte Sagittalebene im Punkt $\underline{r}(s)$. Die Einheitstangente $\underline{t}(s)$ definiert die geschätzte lokale superiore Achse. Sie definiert als Flächennormale die geschätzte lokale Transversalebene im Punkt

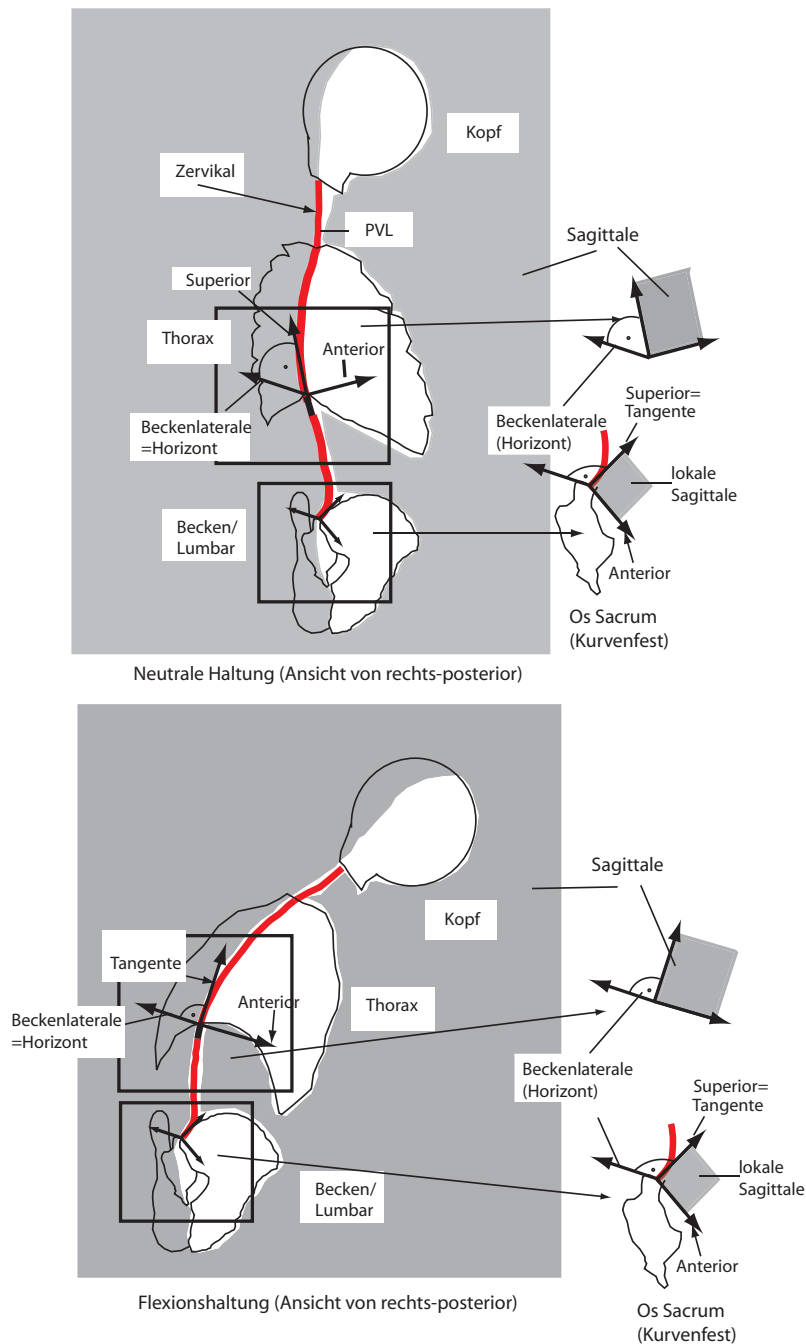


Abbildung 4.3: Neutrale Haltung und Flexion des Oberkörpers, modifiziert nach Christophy u. a. (2012)

$\underline{r}(s)$. Die Seitentangente $\underline{b}(s)$ definiert die geschätzte anteriore Achse; sie ist die Flächennormale der geschätzten Frontalebene im Punkt $\underline{r}(s)$ der i-PVL. Nach der Definition 4.16 ist sie stets orthogonal zur Beckenlateralen \underline{e}_z^0 , also parallel zur Sagittalebene am Sakrum. Daher rührt der Name dieses speziellen Darboux-Darboux.

Nach Christophy u. a. (2012) sind die lokalen Sagittalen in idealer neutraler Haltung (Bild 4.3, oben), sowie bei idealer Flexion/Extension in der Sagittalen (Bild 4.3, unten) orthogonal zur Beckenlateralen ausgerichtet. Die lokalen Sagittalen sind in diesem Fall mit der globalen Sagittalen identisch. In der passiven Lateralextension im Antero-Posterior Radiographen nach Putto und Tallroth (1990), siehe Bild 4.4, wird ein Proband frontal an einer Fotoplatte ausgerichtet, die von einer Roentgenquelle in Antero-Posteriorer Ausrichtung belichtet wird. Der Proband wird in einer Lateralextensionslage fixiert, so dass der Thorax, Becken und Gesicht parallel nach anterior ausgerichtet sind. Die anteriore Achse am Thorax und Kopf wird dadurch annähernd parallel zur Beckensagittale ausgerichtet. Diese Haltung wird als idealisierte Lateralbeugung aufgefasst. Die Schätzung der anterioren Ausrichtung durch den sakrumparallelen Darboux-Dreibein ist in diesen drei Fällen annähernd korrekt, da die anteriore Achse parallel zur Sagittale am Becken ausgerichtet ist. Die Autoren White und Panjabi (1990) geben an, dass idealisierte Flexion-Extension des Oberkörpers in der Sagittalen die natürliche Funktion der Wirbelsäulenlinie darstellt. Nach diesen Autoren, vgl. auch Percy und Tibrewal (1984), geht Lateralbeugung im unteren Lumbarebereich mit gleichzeitiger – geringer – Rotation der Wirbelkörper um die superiore und die laterale Achse einher. Eine idealisierte Lateralbeugung, ohne dass einzelne Wirbel im Lendenbereich die ursprüngliche Sagittale verlassen, findet demnach nicht statt.

Im folgenden wird angenommen, dass die Abweichung der lokalen Sagittalen vom sakrumparallelen Darboux-Dreibein *gering* ist, die Ausrichtung der lokalen Sagittalen wird in dieser Arbeit durch das sakrumparallele Darboux-Dreibein geschätzt. Diese Schätzung kann nicht auf allgemeine Bewegungen des Oberkörpers ausgeweitet werden, da bedeutende Torsion des Thorax gegenüber dem Becken auftreten kann. Die lokale anteriore Richtung kann dann bedeutend von der Sagittalen am Becken abweichen. Für die Bewertung solcher Bewegungen sollte die Methodik in der Zukunft verfeinert werden.

Im weiteren werden die Krümmungsinvarianten des sakrumparallelen Dreibeins einer i-PVL $\underline{r}(s)$ aus 3.21 mit $\gamma(s)$ für geodätische Krümmung, $\beta(s)$ für Normalkrümmung und $\alpha(s)$ für geodätische Windung fest notiert. Für die i-PVL $\underline{r}_0(s)$ in neutraler Haltung werden die Invarianten mit $\gamma_0(s)$, $\beta_0(s)$ und $\alpha_0(s)$ notiert.

Die Normalkrümmung der i-PVL $\underline{r}_0(s)$, $\beta_0(s)$, wird als Referenz für Lateralbeugung des

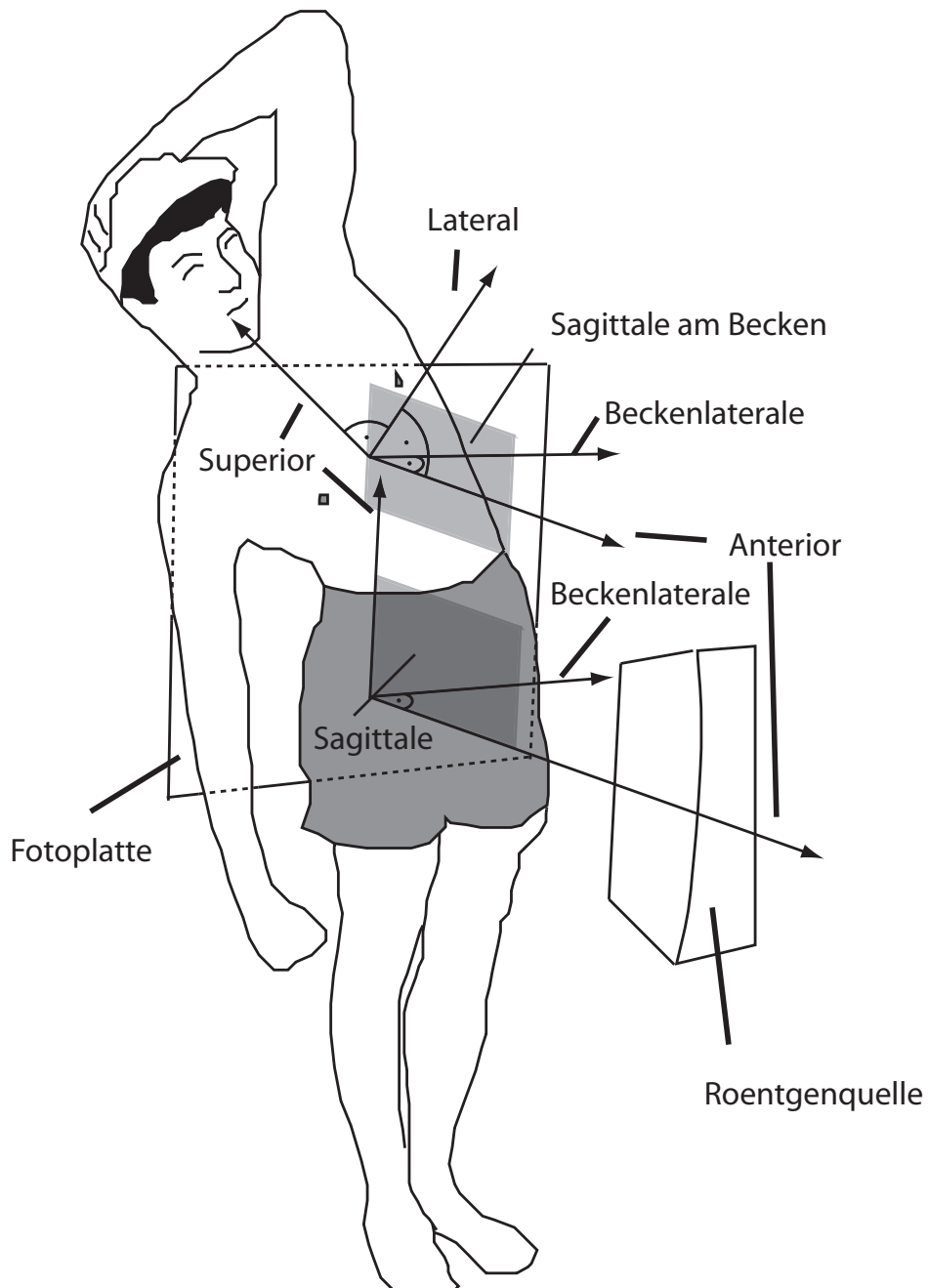


Abbildung 4.4: Antero-Posterior Radiograph nach Putto und Tallroth (1990)

Oberkörpers genutzt, siehe Bild 4.5, oben: Bei Lateralbeugung aus der neutralen Haltung muss die PVL entlang der Wirbelkörper in der Frontalen gekrümmt werden, damit sie weiter der superioren Richtung folgen kann. Bei Krümmung nach rechts nimmt die Normalkrümmung $\beta(s)$ gegenüber $\beta_0(s)$ ab, da diese Krümmung entgegen der Orientierung der lateralen Achse \underline{n} wirkt. Bei Beugung nach links dreht sich das Vorzeichen, die Normalkrümmung nimmt dann zu. Die geodätische Krümmung der i-PVL $\underline{r}_0(s)$, $\gamma_0(s)$, wird als Referenz für Flexion/Extension des Oberkörpers genutzt, siehe Bild 4.5, unten: Bei Extension aus der neutralen Haltung wird die PVL entlang der Wirbellinie innerhalb der lokalen Sagittalen gekrümmt werden, damit sie weiter der superioren Richtung folgen kann. Die PVL in Extensionslage hat geringere geodätische Krümmung $\gamma(s)$ als die i-PVL in neutraler Haltung, da sie entgegen der anterioren Richtung \underline{b} gekrümmt wird. Bei Flexion dreht sich das Vorzeichen um und die geodätische Krümmung $\gamma(s)$ wächst gegenüber $\gamma_0(s)$.

Die Identifikation der Tangentialebene mit der Sagittalebene ist **willkürlich**. Eine Ausrichtung der Tangentialebene in Richtung der Frontalebene führt zu einer gleichwertigen Beschreibung, nur das in diesem Fall geodätische Krümmung als Lateralbeugung interpretiert würde. Normalkrümmung würde dann entsprechend als Flexion/Extension gedeutet.

4.2 Methode zur Schätzung einer i-PVLK aus gemessenen Markerpositionen

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren hergeleitet, das auf Basis mehrerer Kriterien eine optimale geschätzte i-PVL bestimmt, die zu einer Testperson und m gemessenen Positionen \underline{r}_{M_j} von Markern M_j , $j = 1, \dots, m$, korrespondiert. In Übereinstimmung mit Labesse u. a. (1996) und Cappozzo u. a. (2005) wird angenommen, dass die Marker in etwa auf Höhe der hinteren Dornfortsätze auf der Haut der Zielperson aufgebracht und stereophotogrammetrisch gemessen sind, siehe Bild 4.6, links. Hierzu wird davon ausgegangen, dass eine ideale i-PVL $\underline{r}^*(s)$ existiert, die die vorgegebenen Messungen der Markerpositionen \underline{r}_{M_j} unter Berücksichtigung der relativen Verschiebungen der Haut in bestmöglicher Form wiedergibt. Die Optimalitätskriterien sowie die Komponenten des Designvektors \underline{x}_1 werden im folgenden näher beschrieben.

4.2.1 Beziehung einer i-PVL zu gemessenen Markerpositionen

Sei eine Schätzung einer i-PVL $\underline{r}(s)$ durch einen Designvektor \underline{x} und das sakrumparallele Dreibein $\mathcal{K}_2(s)$ gegeben. Sie soll in Bezug zu m gemessenen Positionen \underline{r}_{M_j} von Hautmar-

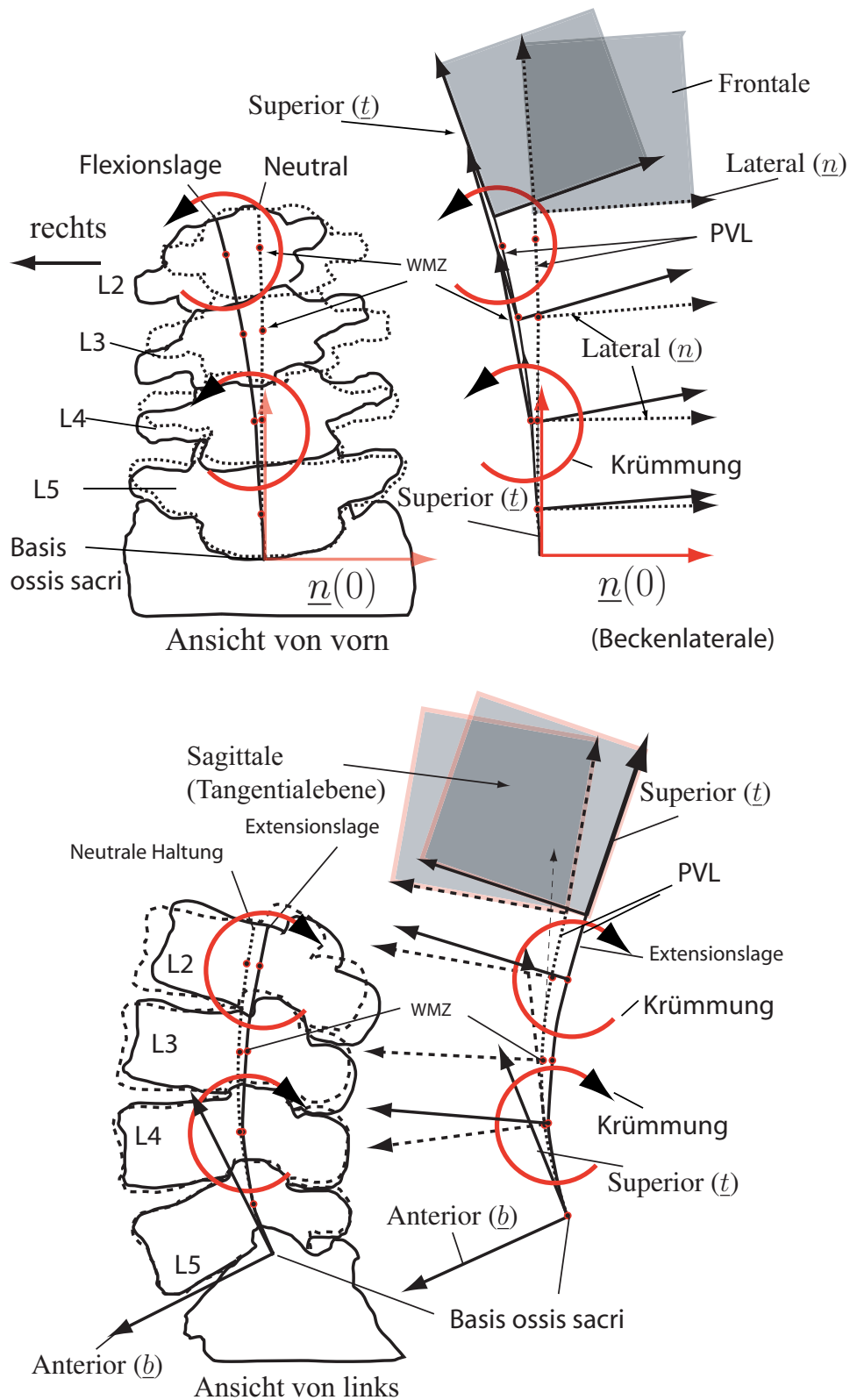


Abbildung 4.5: Lateralbeugung aus neutraler Haltung (oben) und Flexion-Extension aus neutraler Haltung (unten) führt zu Krümmung der PVL

kern M_j , $j = 1, \dots, m$ derart gesetzt werden, dass die Hautmarker einen konstanten Normalabstand d_j zu der i-PVLK $\underline{r}^*(s)$ in jeder Haltung einhalten (vgl. Bild 4.6, links).

Um die Schätzung $\underline{r}(s)$ mit den Markern in Verbindung zu bringen, werden m verschiebbliche „Slider“ S_j (Bild 4.6, links und Mitte) als Modell für den Normalabstand eines Markers zur Kurve eingeführt, siehe Rosenthal und Kecskeméthy (2009). Diese modellieren Normalabstände in Abhängigkeit eines Kurvenparameters s_j und den Winkel ϑ_j , $j = 1, \dots, m$, zum Dreibein $\mathcal{K}_2(s)$ derart, dass die Enden der Slider \hat{M}_j auf dem Strahl entlang der Normalabstände \tilde{d}_j liegen. Dann stellt der Abstand von \hat{M}_j zu M_j denn Anpassungsfehler dar. Als Designvektor \underline{x}_1 wird der in 4.13 definierte Designvektor \underline{x} um die Sliderkoordinaten $\underline{s} = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ erweitert:

$$\underline{x}_1 = [\underline{x}^T, \underline{s}^T]^T \quad (4.20)$$

mit den implizten Zwangsbedingungen

$$\underline{r}'(s_j)^T \cdot (\underline{r}_{M_j} - \underline{r}(s_j)) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.21)$$

und

$$\vartheta_j = \text{atan2}\{(\underline{r}_{M_j} - \underline{r}(s_j))^T \cdot \underline{n}(s_j), (\underline{r}_{M_j} - \underline{r}(s_j))^T \cdot \underline{b}(s_j)\}, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.22)$$

für den Winkel ϑ_j zwischen dem Strahl zwischen \underline{r}_{M_j} und $\underline{r}(s_j)$ und der Binormalen $\underline{b}(s_j)$.

Die Anpassungsgüte von $\underline{r}(s)$ an die Marker M_j wird dann durch die *gewichteten quadratischen Fehlerterme*:

$$f(\underline{x}_1)_1 = \sum_{j=1}^m w_j (||\underline{r}(s_j) - \underline{r}_{M_j}|| - d_j)^2 \quad (4.23)$$

gegeben, siehe Bild 4.6, rechts.

4.2.2 Beziehung einer i-PVLK zur neutralen Lage

In diesem Unterabschnitt soll ein Konzept zur Deformation einer i-PVL aus der neutralen Lage heraus entwickelt werden, aus dem einige Kriterien zur Bewertung einer Schätzung

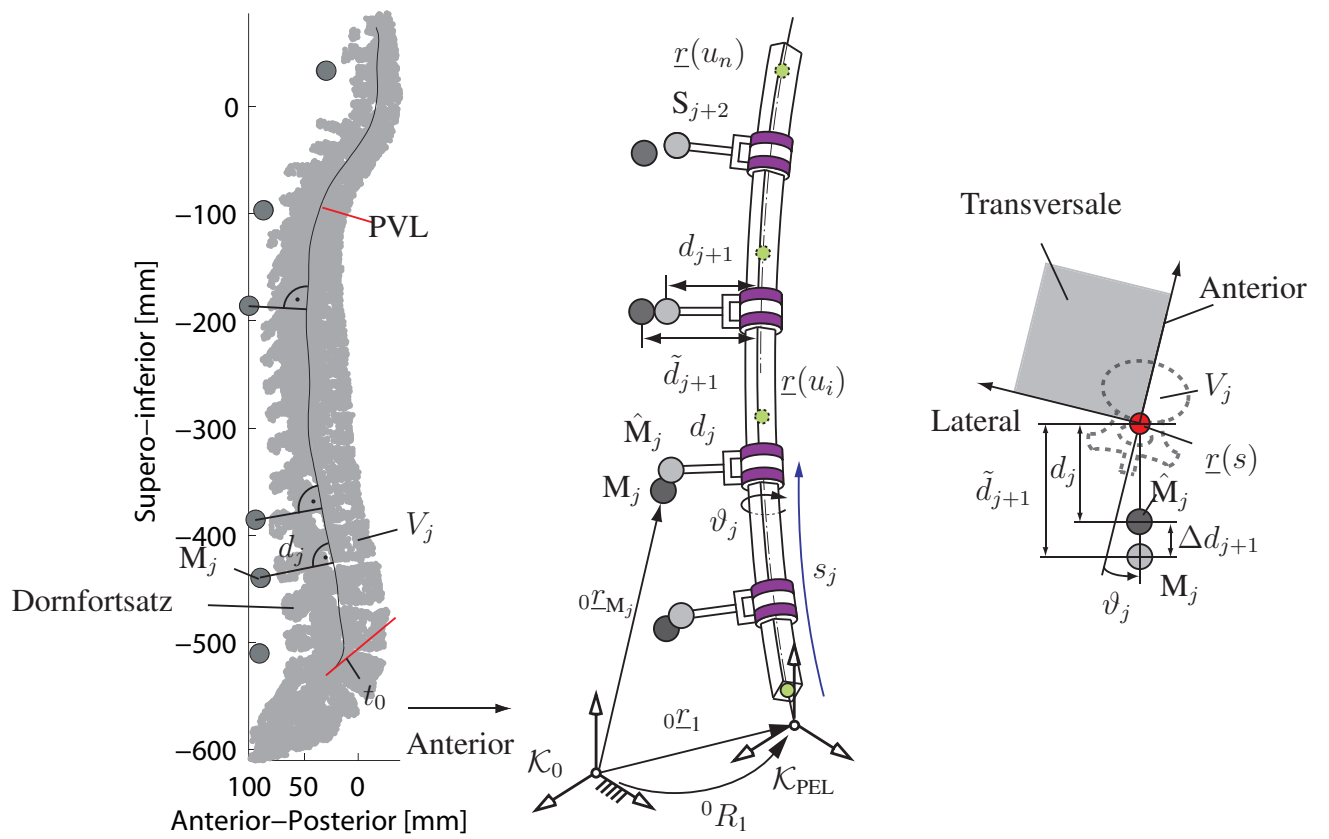


Abbildung 4.6: Wirbelsäulenlinie und Hautmarker in Sagittale (links, Ansicht von rechts), Kurvenmodell mit Markern M_j (dunkel) und errechnete Marker \hat{M}_j (hell) in Bezug auf Laborsystem \mathcal{K}_0 (Mitte), Anpassungsfehler in Transversalansicht (rechts)

$\underline{r}(s)$ einer i-PVLK abgeleitet werden. Basierend auf den Ergebnissen von Lafon u. a. (2010), nachdem die Segmentlängen ℓ_i (s.u.) einer idealtypischen i-PVL $\underline{r}^*(s)$ bis auf weniger als 1,5% gleich den Segmentlängen der i-PVLK $\underline{r}_0(u)$ in der neutrale Lage sind, wird als Nebenbedingung angenommen

$$\ell_i = \int_{u_{1,0}}^{u_{i,0}} ||\underline{r}^{*'}(u)|| du = \ell_{i,0} = \int_{u_{1,0}}^{u_{i,0}} ||\underline{r}'_0(u)|| du \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.24)$$

Ebenso wird angenommen, dass die gleichmäßige Krümmung einer stabilen PVL dadurch erhalten bleibt, dass Verformung der PVL infolge Flexion/Extension, Lateralbeugung und Oberkörper torsion gleichmäßig entlang der PVL erfolgt. Dazu wird kleine (infinitesimale) Flexion/Extension aus neutraler Haltung an allgemeinem Punkt $\underline{r}(s)$ proportional zu einem festen Faktor w_γ über die geodätische Krümmung

$$\Delta f_\gamma = w_\gamma \cdot (\gamma(s) - \gamma_0(s)) \quad (4.25)$$

und der Gesamtaufwand für Krümmung infolge Flexion/Extension durch das verallgemeinerte linear elastische Funktional

$$f_\gamma(\underline{x}_1) = w_\gamma \int_0^{\ell_n} (\gamma(s) - \gamma_0(s))^2 ds \quad (4.26)$$

bewertet. Ebenso wird kleine (infinitesimale) Lateralbeugung aus der neutralen Haltung proportional zu einem festen Faktor w_β über die Normalkrümmung

$$\Delta f_\beta = w_\beta \cdot (\beta(s) - \beta_0(s)) \quad (4.27)$$

und der Gesamtaufwand für Krümmung infolge Lateralbeugung durch das verallgemeinerte linear elastische Funktional

$$f_\beta(\underline{x}_1) = w_\beta \int_0^{\ell_n} (\beta(s) - \beta_0(s))^2 ds \quad (4.28)$$

bewertet. Es wird angenommen, dass eine idealtypische i-PVL $\underline{r}^*(s)$ den Gesamtaufwand für Flexion/Extension und Lateralbeugung minimiert.

Die Oberkörper torsion wird über den Winkel ϑ_j der geschätzten Markerpositionen \hat{M}_j zur geschätzten Sagittalebene bewertet. Diese Drehung setzt sich zusammen aus der relativen Torsionsdrehung der Wirbelkörper untereinander und der Gleitung der Haut relativ zum Wirbel in

Transversalrichtung. Da beide Effekte über entsprechende Steifigkeiten des Gewebes entstehen, wird hier angenommen, dass eine idealtypische i-PVL die Torsionsenergie minimiert. Der Torsionsaufwand wird durch die diskretisierte geodätische Torsion, siehe Rosenthal u. a. (2012), bewertet:

$$f_{\vartheta}(\underline{x}_1) = \sum_{j=1}^m t_k(\vartheta_j - \vartheta_{j-1})^2, \quad (4.29)$$

mit den Torsionssteifigkeiten t_k , und den Sliderkoordinaten ϑ_j .

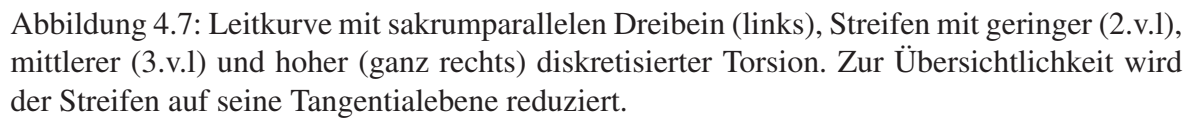
Die Sliderwinkel ϑ_j entsprechen einer Rotation des Markers um die superoinferiore Achse mit Bezug zum sakrumparallelen Dreibein auf Höhe der Bogenlänge s_j , siehe Bild 4.6, rechts. Eine moderate diskretisierte geodätische Torsion entspricht einer geringen Abweichung der Hautmarker entlang der i-PVL, siehe Bild 4.7, links. Große Abweichung der Hautmarker vom sakrumparallelen Darboux-Dreibein bewirkt große diskretisierte geodätische Torsion (Bild 4.7, rechts).

Der Gesamtaufwand, der durch $\underline{r}(s)$, erweitert zum Streifen und mit den Slidern S_j wird in Bezug zu den gemessenen Markerpositionen \underline{r}_{M_j} und den im vorigen Abschnitt definierten Anpassungsgüte gesetzt. Als Ansatz für die Bestimmung der Wirbelsäulenlinie ergibt sich somit die Minimierung der Kostenfunktion

$$f_2(\underline{x}_1) = \int_0^{\ell_n} w_{\gamma}(\gamma(s) - \gamma_0(s))^2 + w_{\beta}(\beta(s) - \beta_0(s))^2 ds + \sum_{j=1}^m t_k(\vartheta_j - \vartheta_{j-1})^2. \quad (4.30)$$

4.3 Optimierungsansatz zur Ermittlung der Wirbellinie

Das Verfahren wurde wie in Rosenthal und Kecskeméthy (2009); Rosenthal u. a. (2012) beschrieben, mithilfe der C++-Mehrkörpersimulationsbibliothek M²BILE, Kecskeméthy (1993) implementiert. Zur Modellierung und Bestimmung von Invarianten von Splinekurven und begleitenden Dreibeine wird dabei auf die Unterbibliothek MoCurveJoint, siehe Tändl (2009), zurückgegriffen. Diese Bibliothek ist zur Generierung und Analyse von Bewegungen von Festkörpersystemen $\mathcal{K}_2(t)$, entlang einer Trajektorie, modelliert durch Splinekurven bzgl. eines kurvenfesten Systems \mathcal{K}_1 , entworfen worden. Das kurvenfeste System \mathcal{K}_1 wird mit dem Becken identifiziert. Die Bibliothek MoCurveJoint delegiert die Lösung der Hermite-Interpolationsprobleme und Evaluation von Splinekurven in B-Splineform an Dierckx (1993).



Wie in Rosenthal und Kecskeméthy (2009) beschrieben, können die Nebenbedingungen Gl. 4.21 und Gl. 4.22 durch geometrische Übertragungselemente modelliert und mithilfe der Powell-Hybrid-Methode, siehe Powell (1970), gelöst werden, wenn $f(\underline{x}_1)$ berechnet wird. Dadurch werden die Sliderkoordinaten \underline{s} , \underline{v} , eliminiert und als reduzierter Designvektor des Verfahrens bleibt der Designvektor der i-PVL \underline{x} .

Die Minimierung der Kostenfunktion Gl. 4.30 erfolgt durch die Optimierungsbibliothek NAG, Mark 8, Routine e04unc, siehe NAG (2005). Diese Routine ist ein SQP-Löser für allgemeine nichtlineare Optimierungsprobleme wie das vorliegende. Die Berechnung der Beugeterme $f_\gamma(\underline{x}_1)$ und $f_\beta(\underline{x}_1)$ wird durch die Trapezsumme,

$$\hat{f}_\kappa(\underline{x}) = \frac{\ell_n}{n_{\text{step}}} \left[\sum_{k=0}^{n_{\text{step}}} w_\gamma \left(\gamma\left(\frac{k\ell_n}{n_{\text{step}}}\right) - \gamma_0\left(\frac{k\ell_n}{n_{\text{step}}}\right) \right)^2 + w_\beta \left(\beta\left(\frac{k\ell_n}{n_{\text{step}}}\right) - \beta_0\left(\frac{k\ell_n}{n_{\text{step}}}\right) \right)^2 \right] \quad (4.31)$$

angenähert, wo n_{step} die Anzahl der Unterteilungen darstellt, siehe Stoer (1983). Die Summanden haben dabei die Form von $2 \cdot n_{\text{step}}$ nichtlinearen Federpotentialen, die man sich näherungsweise als Paare von Torsionsfedern entlang der Kurve $\underline{r}(s)$ vorstellen kann. Die Summanden spielen dabei die Rolle von Rückstellkräften, die auf die Koordinaten des reduzierten Designvektors \underline{x} wirken. Damit die Näherung 4.31 ausreichend genau und damit die Berechnungen numerisch stabil sind, sind genügend Unterteilungen zu wählen. Für die hier durchgeführten Simulationen wurde $n_{\text{step}} = 100$ gewählt. Segmentlängen Gl. 4.24 werden dazu mit den Methoden der Arbeit Tändl (2009) errechnet.

In der Definition der Kostenfunktion nach 4.30 treten Ausdrücke bis zur Ableitung $\underline{r}'(s) = \underline{r}''(s)$ auf. In Kapitel 3 wurde ausgeführt, dass für die Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen durch SQP die Kostenfunktion und alle Nebenbedingungen zweifach stetig differenzierbar sein müssen. Daher muss der Grad der Splinekurve $\underline{r}(u)$ mindestens fünf sein; die Methodik, die in diesem Kapitel vorgeschlagen wird, basiert aus diesem Grund auf quintischen Splinekurven. Zur Definition einer quintischen Splinekurve sind mindestens sechs Randbedingungen notwendig, von denen zwei durch die festen Anfangsbedingungen \underline{t}_0 und \underline{r}_0 gegeben sind. Daher sind vier weitere Modellwirbel notwendig, um genügend Randbedingungen zu erhalten.

5 Experimentelle Überprüfung des Konzepts

In diesem Kapitel soll anhand experimentell erhobener Daten geprüft werden, ob die im vorherigen Kapitel entwickelte Methodik zur Schätzung einer i-PVL zu plausiblen Simulationsergebnissen führt. Dazu wurden zwei Einzelfall-Experimente durchgeführt; im ersten Experiment werden die Modellparameter aus der MRT Messung eines Probanden A (männlich, asymptomatisch, 41 Jahre, 79 Kg, 1,90m Körpergröße) hergeleitet und die Simulation der Wirbelsäulenlinie für eine gemessene Lateralbeugung mit veröffentlichten Daten verglichen. Im zweiten Experiment werden an einem Probanden B (männlich, asymptomatisch, 46, 72 Kg, 1,79 m Körpergröße) CT-gemessene Lumbarkurven mit Simulationsergebnissen für definierte Oberkörpertorsion verglichen.

5.1 Einzelfall Lateralbeugung

5.1.1 Datenbasis für die Parameterbestimmung

Proband A wurde in suppler, neutraler Haltung in einem MRT durch die Tribology Group der Rush University, Chicago, Illinois (USA) in Gänze vermessen, siehe Bild 5.1. Das Einverständnis des Probanden und des lokalen Ethikkomitees wurde eingeholt. Vor der Aufnahme wurden sieben ölhaltige Ersatzmarker M_j , $j = 1, \dots, 7$, die für diesen Zweck aus Holzperlen und Plastikfüßen hergestellt wurden, in Höhe der Dornfortsätze der Wirbelkörper:

- 1) Sakrum= M_1 , L3= M_2 , L1= M_3 des Lumbarsegments,
- 2) Th10= M_4 und Th4= M_5 des Thoraxsegments und
- 3) C7= M_6 C3= M_7 und des Zervikalsegments,

aufgebracht, so dass i) jedem Bewegungssegment mindestens zwei Hautmarker zugeordnet werden können und ii) an den Enden jedes Bewegungssegments ein Hautmarker platziert ist, vgl. Leardini u. a. (2009). Diese Hautmarker sind im MRT ortbar, siehe Bild 5.1 und Bild 5.3, oben. Zur Bestimmung eines beckenfesten Referenzsystem \mathcal{K}_1 wird die Newington-Gage-Methode herangezogen, siehe Davis III u. a. (1991), welche das Beckenzentrum aus zwei zusätzlichen Hautmarkern an den Referenzpunkten linker und rechter vorderer Beckenbogen (left/right anterior superior iliac spine, LPSI= M_8 , RPSI= M_9) bestimmt.

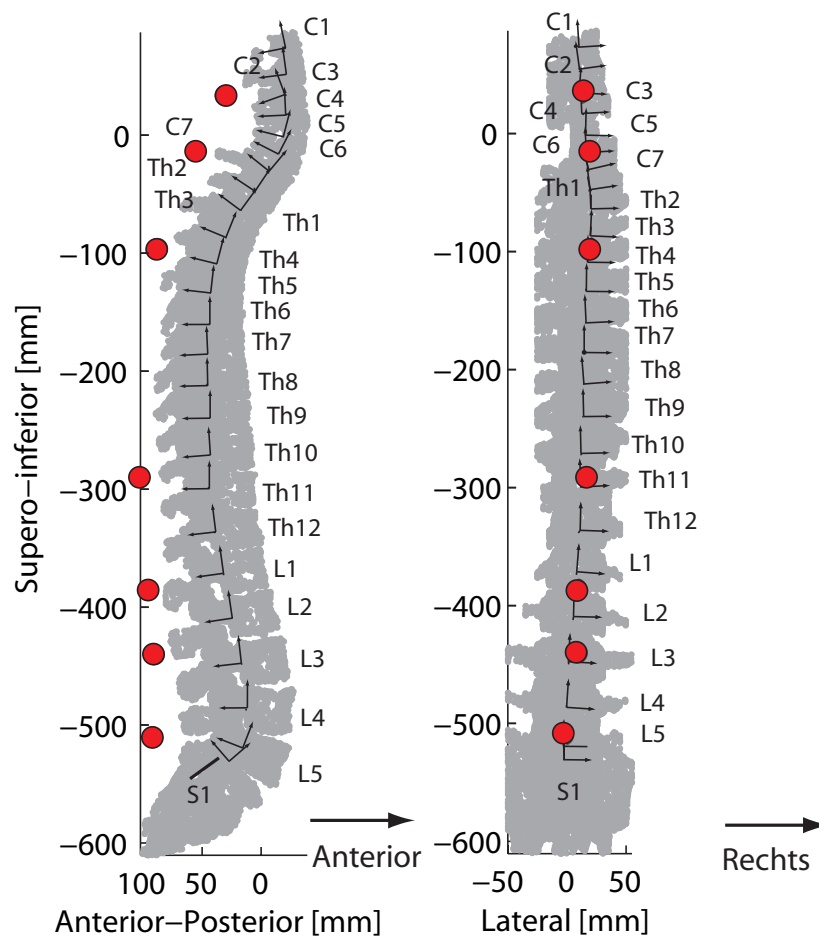


Abbildung 5.1: Proband A in supiner Haltung, MRT-gemessen, Hautmarker (rot)

Nach der MRT Vermessung führte Proband A eine Lateralbeugung aus aufrechtem, neutralen Stand 30° nach rechts aus. Die Ganglabordaten wurden mit einem 12-Kamera optoelektronischen Motion-Capture System vom Typ Oqus, Qualisys, Gothenburg, Schweden, bei einer Abtastrate von 120 Hz gemessen, das Messinterval beträgt 5 Sekunden.

5.1.2 Bestimmung der Modellparameter

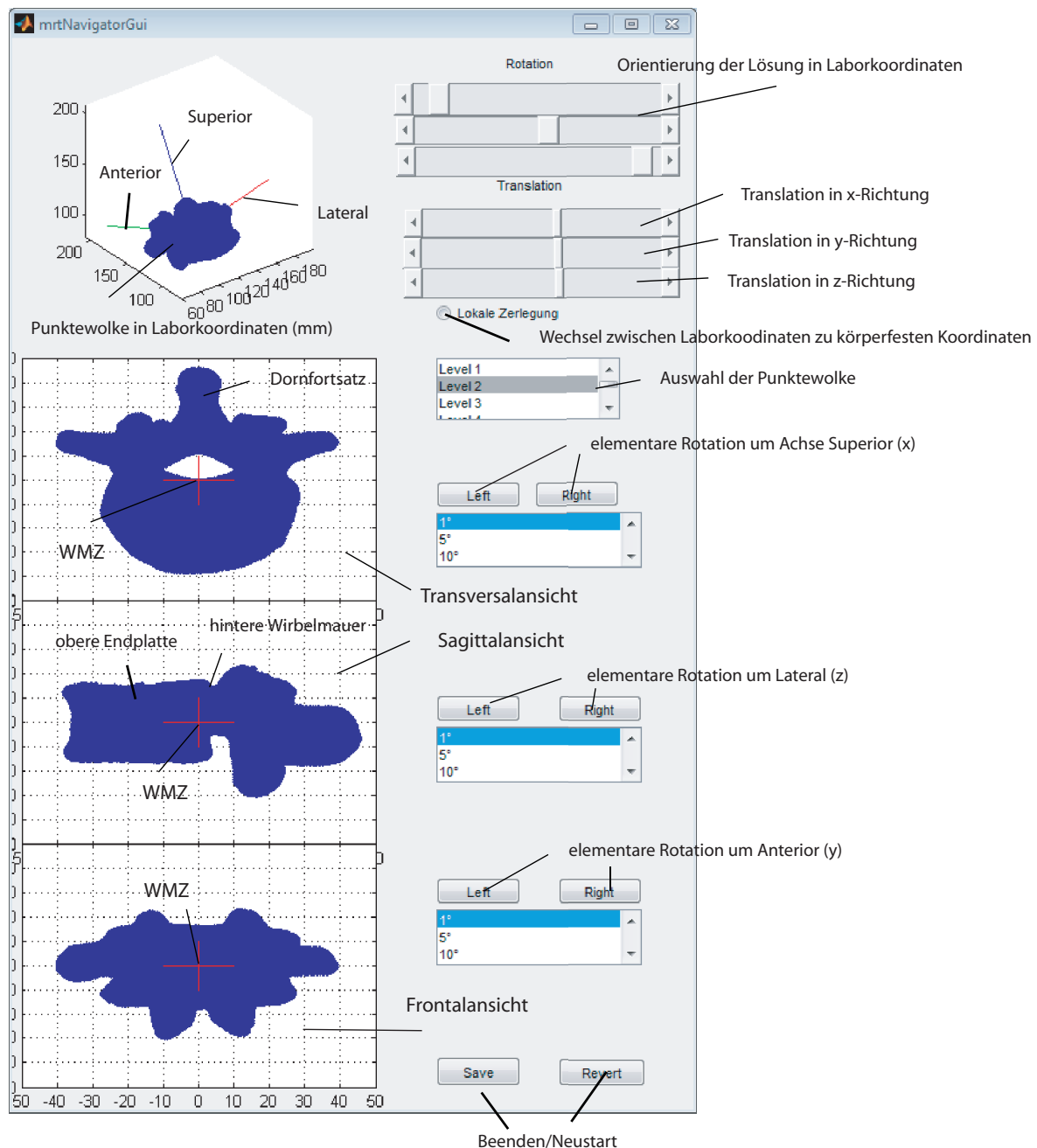


Abbildung 5.2: Visualisierung der Punktwolke und inkrementelle Anpassung am Beispiel des Wirbels L4

Die Wirbelkörper inkl. dem Sakrumpodest (S1), sowie die Hautmarkerpositionen M_i , $i = 1, \dots, 7$ wurden mithilfe der interaktiven Region-Growing-Methode, siehe Maleike u. a. (2009) aus der MRT Aufnahme als Punktwolken geschätzt. Die MRT werden in Voxel von 2 mm Durchmesser in kranialkaudale Richtung, sowie 1 mm in lateraler und anteroposteriorer Richtung diskretisiert. Die hinteren Wirbelmauerzentren \underline{r}_i und die lokalen klinischen Achsen $\mathbf{R}_2 = [\underline{e}_x^i, \underline{e}_y^i, \underline{e}_z^i]$ werden per Hand an die Punktwolken angepasst durch Feinverschiebungen und Rotationen in Schritten von 1 mm bzw. 1° mit sechs Freiheitsgraden entlang der klinischen Achsen. Die Freiheitsgrade werden als elementare Transformationen der Form:

$$\Delta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

für elementare Translation um 1 mm in x-Richtung (Superior) und

$$\Delta\rho_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{180}) & \sin(\frac{\pi}{180}) & 0 \\ 0 & -\sin(\frac{\pi}{180}) & \cos(\frac{\pi}{180}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

für Rotation um x-Richtung (Superior) um 1° in körperfesten Koordinaten dargestellt, für die elementaren Translationen und Rotationen entlang y (Anterior), z-Richtung (laterale Achse) entsprechend. Als Anfangsschätzung dient der Mittelpunkt jeder Punktwolke, mit Einheitsausrichtung an dem Koordinatensystem des MRT-Scanners als Lateral (x-Richtung), Anterior (y-Richtung) und Superior (z-Richtung), siehe auch Bild 5.1. Danach werden elementare Transformationen inkrementell angewendet, bis visuelle Deckung in lokaler Frontale, Transversale und Sagittale erreicht ist. Visualisierung und elementare Transformationen wurden mithilfe der symbolischen Berechnungssoftware Matlab (Mathworks, Natick, MA, USA) implementiert, siehe Bild 5.2. Die Unsicherheiten infolge von Diskretisierungsfehlern und Fehlanpassung der WMZ betragen mindestens ca. 1 mm bzw. 1° . Die ermittelten klinischen Achsen und WMZ sind in Bild 5.1 abgebildet.

Als Modellwirbel für die i-PVL in neutraler Haltung werden vom Startwirbel S1 (Basis os-sis sacri) aus jeder zweite Wirbel in Richtung kranial festgelegt, also die 13 Wirbel S1, L4, L2, Th12, Th10, Th8, Th6, Th4, Th2, C7, C5, C3, C1, die laut Abschnitt 4.1.1 mit geraden

Indizes notiert sind. Die i-PVL in neutraler Haltung $\underline{r}_0(s)$ wird wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben an diese Modellwirbel angepaßt. Die Normalabstände werden ermittelt, in dem die Nebenbedingungen Gl. 4.21 und Gl. 4.22 mithilfe der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Modellimplementierung gelöst werden; der Abstand wird durch $d_j = \|\underline{r}_{M_j} - \underline{r}(s_j)\|$ bestimmt. Die Segmentlängen ℓ_j werden mithilfe der Modellimplementierung wie in Abschnitt 4.3 erläutert bestimmt.

Die Lage und Orientierung des Beckenzentrums $\mathcal{K}_1(t)$ wird mit der Newington-Gauge-Methode zu jedem Zeitpunkt des Analyseintervalls aus den Markerpositionen Sacrum (M_1), LASI (M_8), und RASI (M_9) bestimmt. Die Lage und Orientierung der Basis ossis sacri, \mathcal{K}_2^0 in der Anfangslage der Bewegungsanalyse ergibt sich mit der von den Autoren Davis III u. a. (1991) angegebenen Lage des Beckenzentrums in $\mathcal{K}_1(t)$ aus der händisch bestimmten Lage der Basis ossis sacri. Es wird angenommen, dass die Lage von \mathcal{K}_2^0 während der gesamten Bewegungsanalyse fest im Koordinatensystem $\mathcal{K}_1(t)$ ist. Laut der Arbeit von Leardini u. a. (1999) ist der mittlere Fehler dieser Methode in der Lage des Beckenzentrums $\Delta = 29,1$ mm, bei einer anatomischen Schwankung von ca. 15 mm in den Koordinaten des Beckenzentrums über die Population. Diese Genauigkeit ist für die qualitative Bewertung der Simulationsergebnisse ausreichend, die Lage des Hautmarkers am Sacrum, \underline{r}_{M_1} wird im folgenden nicht weitergehend analysiert.

Um einen Anfangswert für den Designvektor \underline{x} des Optimierungsverfahren (vgl. Gill u. a. (1981)) abzuleiten, wird die Konfiguration der i-PVL zu Beginn der Bewegungsanalyse grob geschätzt. Nach Mauch u. a. (2010) bewirkt eine Änderung der Haltung von suppin zu neutralem Stand eine Änderung der lordotischen Kurve von mindestens 6° , sowie eine Stauchung im Bereich von 1-2 mm pro Wirbelkörper. Um diese Haltung zu approximieren, werden die Wirbel Th10-C1 oberhalb der Lendenwirbelsäule mit Fixpunkt im WMZ des Wirbels Th10 um die laterale Achse rotiert, bis sich visuelle Deckung von Hautmarkern und WMZ ergibt, siehe Bild 5.3. Dazu wurde der Winkel auf 10° festgelegt. Die so erhaltenen Wirbelmauerzentren dienen als Anfangsschätzung für \underline{x} .

Aufgrund der Neuartigkeit des numerischen Ansatzes kann innerhalb dieser Arbeit eine systematische Analyse nicht erfolgen. Die benötigte Rechenzeit für eine einzelne Schätzung der i-PVL aus gemessenen Markerpositionen variiert zwischen ca. einer Minute bis zu mehr als zwei Minuten (siehe Abschnitt 5.1.3), so dass eine systematische Identifikation der zu definierenden Steifigkeitsparameter w_β , w_γ , w_k und t_k zu diesem Zeitpunkt nicht zielführend wäre. Stattdessen wird die Durchführbarkeit der Methode und die Plausibilität der Simulationsergebnisse in einer einzelnen Pilotauswertung bewertet.

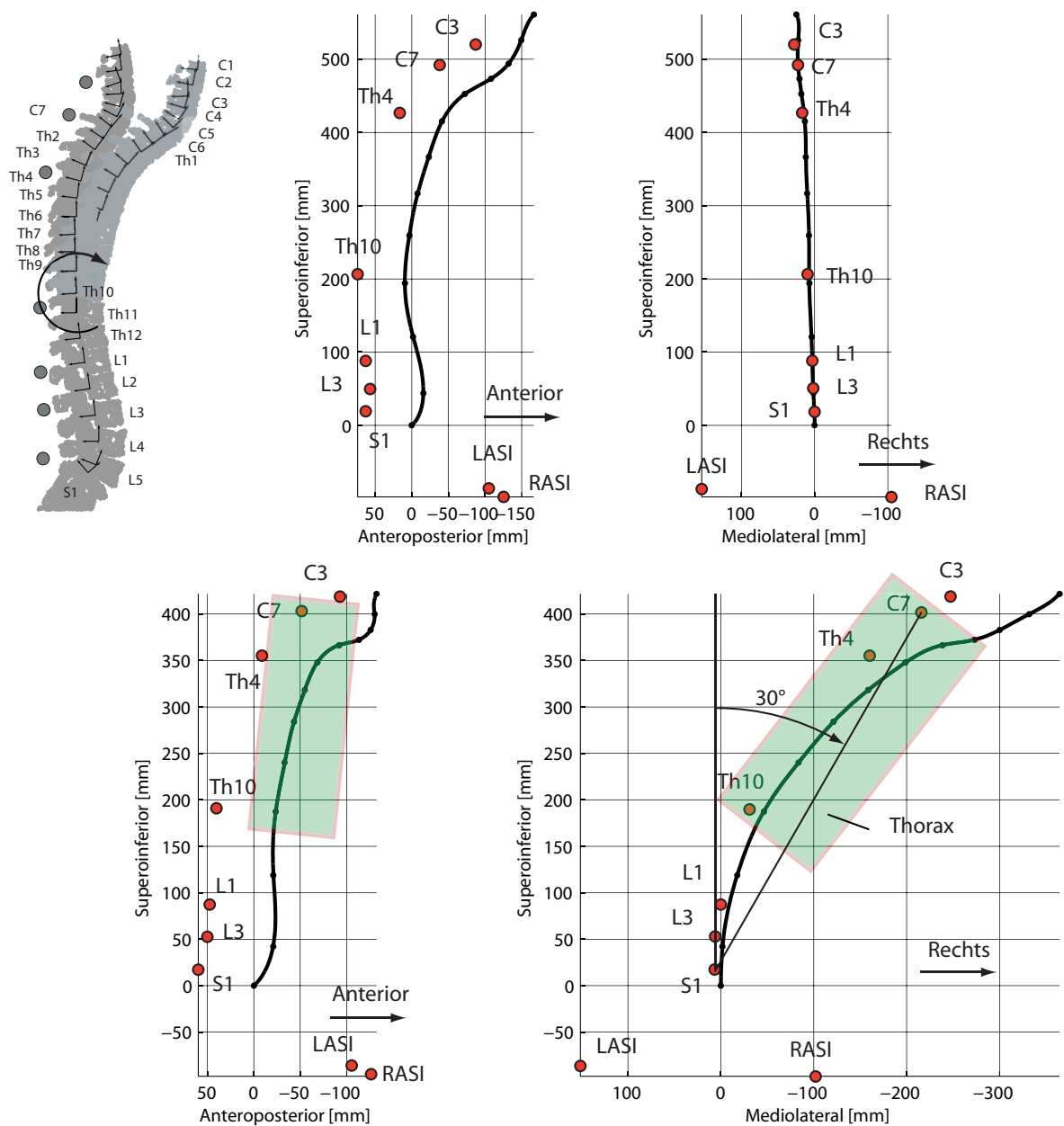


Abbildung 5.3: Grobe Annäherung der Anfangslage und i-PVL in Anfangslage (oben), i-PVL in Lateralextension (unten), Hautmarker (rot)

Dazu werden die Steifigkeits-Parameter in einem ad-hoc Verfahren so skaliert, dass im Anfangspunkt der Bewegungsanalyse i) die Anpassungsgüte der Hautmarker an die geschätzte PVL akzeptabel ist und ii) die Konditionszahl des in Abschnitt 4.3 beschriebenen Optimierungsverfahren in der Nähe der Lösung hinreichend klein ist. Die Plausibilität dieser Ergebnisse kann eine systematische Analyse des numerischen Ansatzes werden.

Zunächst wird angenommen, dass Flexion/Extension und Lateralbeugung aus der neutralen Haltung gleich wahrscheinlich bzw. gleich aufwändig ist und $w_\beta = 1$, $w_\gamma = 1$ fest definiert. Da die WMZ nur bis auf 1 mm genau händisch bestimmt werden können ist eine Anpassungsgüte der Hautmarker an die geschätzte Kurve von 1 mm ausreichend. Eine Konditionszahl in der Nähe der Lösung unterhalb von 100 wird hinsichtlich der Kriterien in Abschnitt 3.3.2 akzeptiert.

Für die w_k wird zunächst $w_k = 1$ und die t_k wird $t_k = t_k = \frac{3}{\pi}$ angenommen. Danach werden folgende Schritte durchgeführt:

- 1) Löse das Optimierungsproblem Gl. 4.30 mit den definierten Parametern in der Anfangskonfiguration der Bewegungsanalyse.
- 2) Bestimme den maximalen Anpassungsfehler $\varepsilon = \max(||\mathbf{M}_j - \hat{\mathbf{M}}_j||$.
- 3) Falls $\varepsilon > 1$ mm multipliziere alle w_k mit 10 und wiederhole Schritt 1-3).
- 4) Falls die Konditionszahl bei der Lösung größer als 100 ist, erhöhe t_k um $\frac{3}{\pi}$ und wiederhole 1) und 4).

Nach fünf Iterationen erhält man so die Parameter $w_\beta = w_\gamma = 1$, $w_k = 1000$, $t_k = \frac{18}{\pi}$.

Das Verfahren zur Schätzung der i-PVL aus Abschnitt 4.2 wird mit den bestimmten Parametern und definierter Anfangsschätzung für \underline{x} zum Zeitpunkt $t = 0$ gelöst, siehe Bild 5.3, oben. Für die übrigen Zeitpunkte $t \in]0, 5s]$ wird die Lösung \underline{x}^* des vorangehenden Zeitschritts $t_{\text{vorher}} = t - \frac{1}{120}s$ als Anfangsschätzung genutzt und das Optimierungsverfahren inkrementell weitergeführt. Um den Suchraum zu beschränken, werden die Grenzen \underline{l} , \underline{u} nach Abschnitt 3.2.2 so gewählt, dass die Zielkoordinaten um 1 cm von der Anfangslösung abweichen können, was bei der Abtastrate von 120 Hz einer maximalen Geschwindigkeit von $1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. einer maximalen Winkelgeschwindigkeit von ca. 1,2 Hz bei einer Länge des Torso von ca. 1m. entspricht. Diese Winkelgeschwindigkeit wird bei der maximalen Lateralextension von 30° nicht überschritten.

Tabelle 5.1: Performance-Zahlen des Lösungsverfahrens für Lateralbeugung

	Mittelwert	Min	Max
Anzahl Iterationen	99,11	11	179
CPU Zeit (s)	96	10	173
Logarithmus der Konditionszahl	2,29	0	7,66

5.1.3 Ergebnisse

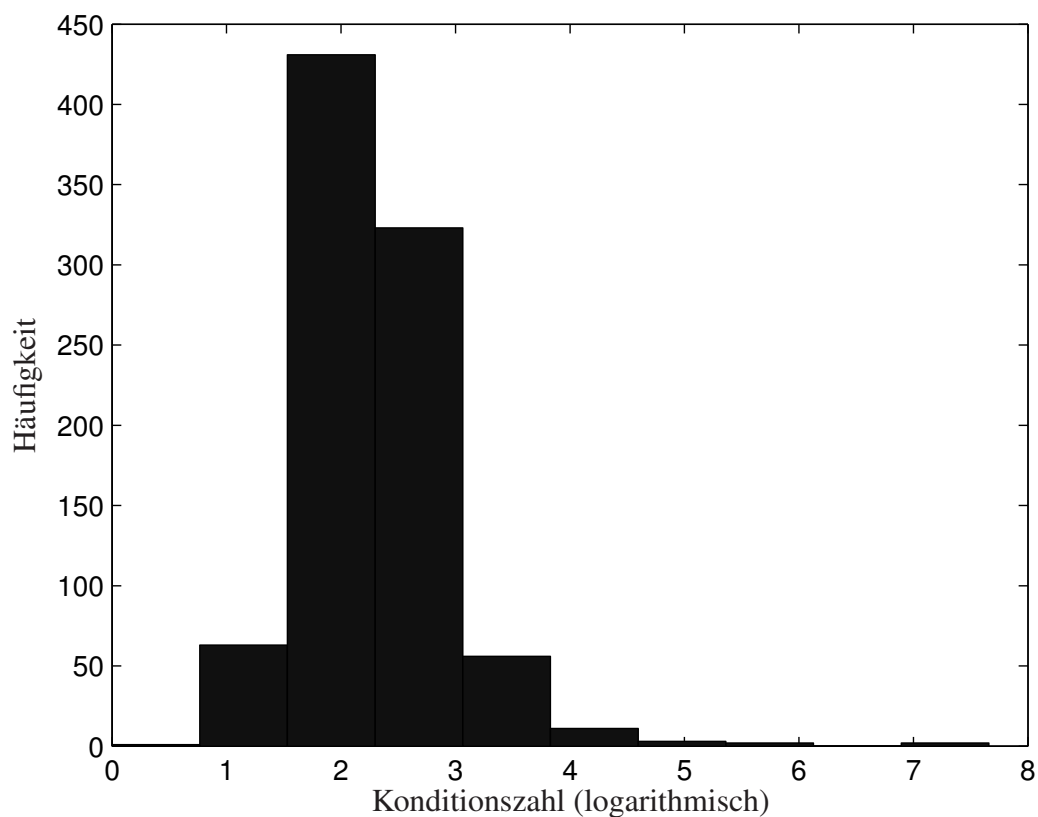


Abbildung 5.4: Verteilung des Logarithmus der Konditionszahl

In Tabelle 5.1 sind die numerischen Kennzahlen des Lösungsverfahrens angegeben. In dieser Tabelle wird für die Konditionszahl bei der Lösung des Problems der dekadische Logarithmus angegeben, in Bild 5.4 ist ein Histogramm des dekadischen Logarithmus der Konditionszahl bei der Lösung für alle Instanzen des Fittingproblems abgebildet. Die gesamte Rechenzeit betrug 16h, bei einer mittleren Zeit für eine einzelne Kurvenbestimmung von 96 s. Das Verfahren ist in jeder Instanz konvergent. Während in den meisten Fällen eine moderate Konditionszahl in der Größenordnung zwischen 10^2 und 10^3 ermittelt wird, ergibt sich in einigen Fällen ein schlecht gestelltes Problem mit einer Konditionszahl über 10^6 hinaus.

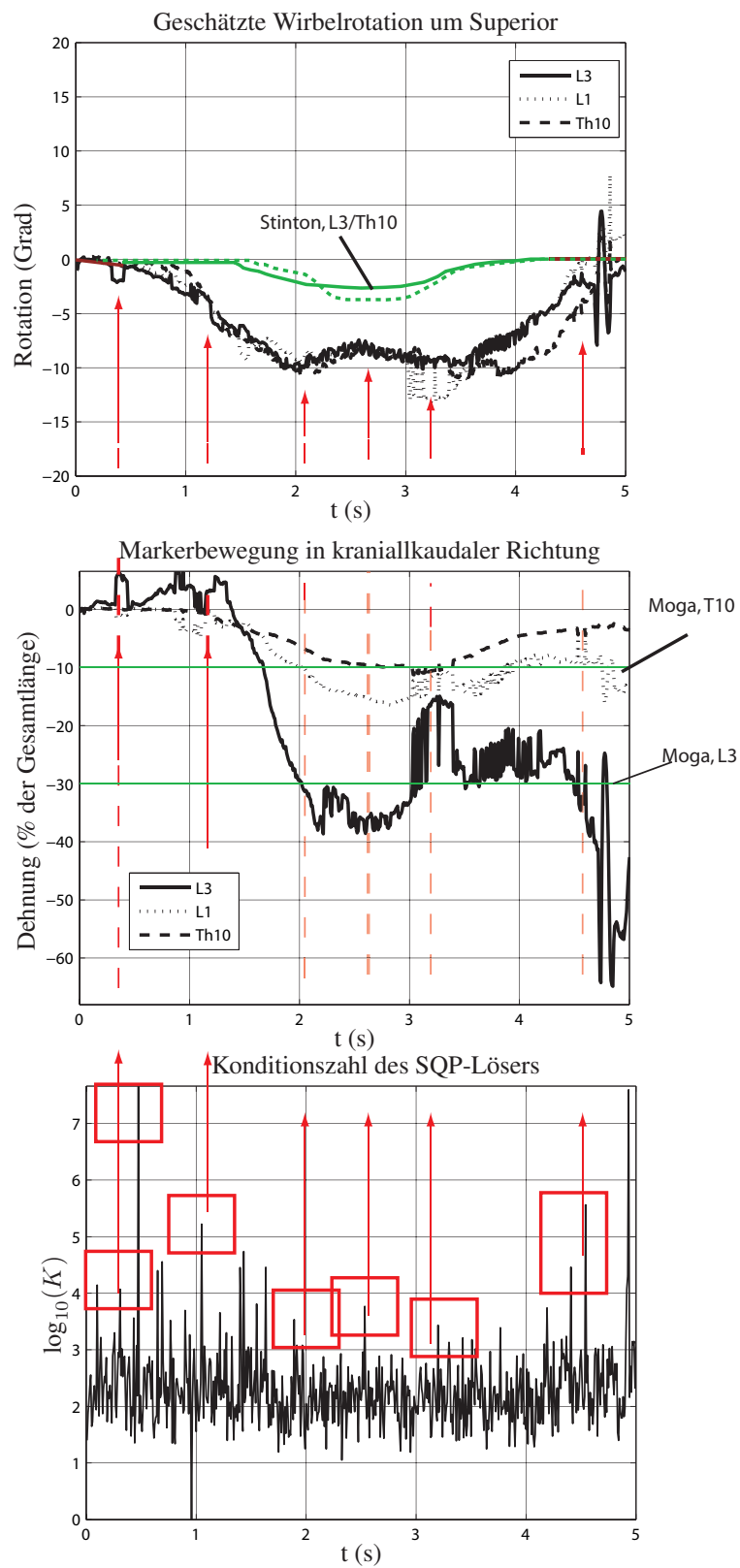


Abbildung 5.5: Geschätzte Rotation (oben), Hautbewegung (Mitte) und Konditionszahl bei Lösung

Zur Plausibilitätsprüfung werden folgende Ergebnisse angegeben, für die Vergleichswerte in der Literatur bestehen:

1. Die Sliderwinkel ϑ_j , $j = 2, \dots, 7$, bezogen auf den Wert am Ausgangspunkt der Bewegung: $\Delta\vartheta_j(t) = \vartheta_j(t) - \vartheta_j(0)$, $j = 2, \dots, 7$, $t \in [0, 5s]$. Dies entspricht der Summe der geschätzten Rotation des Wirbels und der Hautbewegung um die i-PVL, bezogen auf den Ausgangswert und gemessen zum sakrumparallelen Darboux-Dreibein, vgl. Bild 4.6.
2. Der Abstand der Weglängenkoordinaten s_j , $j = 2, \dots, 7$, zur Ausgangskoordinate, in % des Ausgangswertes. $\Delta s_j(t) = (s_j(t) - s_j(0)) \cdot \frac{100\%}{s_j(0)}$. Dies entspricht der geschätzten Hautbewegung in kraniokaudaler (superoinferiorer) Richtung, relativ zur geschätzten i-PVL.

In Bild 5.5 finden sich die geschätzten Rotation (oben) und Hautbewegungen (Mitte) für den Lumbarebereich, Wirbel L3, L1, Th10. Zum Abgleich findet sich unten der die Konditionszahl des SQP-Lösers bei der Lösung über die Zeit. In Bild 5.6 finden sich die geschätzten Rotation (oben) und Hautbewegungen (Mitte) für den Thoraxbereich, Wirbel Th4, C7, C3. Die Konditionszahl des SQP-Lösers ist ebenfalls zum Vergleich abgebildet. Zur weiteren Analyse ist die geschätzte i-PVL in der Lateralextension von 30° in Bild 5.3, unten abgebildet.

Wie man sieht, wird für den Wirbel T10, L1 und L3 eine maximale Rotation von ca. 10° nach rechts geschätzt. Für den Thorax- und Zervikalbereich wird eine maximale Rotation von ca. 15° nach rechts geschätzt. Die prozentuale Hautdehnung beträgt ca. 40% für L3, 15% für L1 und 10% für T10. Im Thorax- und Zervikalbereich wird eine prozentuale Dehnung von ca. 10% geschätzt. Diese geschätzten Werte sind im zeitlichen Verlauf weitgehend glatt, es ergeben sich jedoch einzelne Spitzen bzw. Sprünge. Eine direkte Gegenüberstellung von Konditionszahl und geschätzter Hautbewegung (rote Markierungen in Bild 5.5 und Bild 5.6) zeigt, dass die Zeitpunkte von höchster Konditionszahl diesen Sprüngen vorangehen.

5.1.4 Diskussion

Die geschätzten Werte werden mit den von Percy und Tibrewal (1984), Stinton (2011) und Moga (2010) veröffentlichten Werten für vergleichbare Bewegungen des Oberkörpers qualitativ verglichen. Stinton (2011) gibt eine gute Verlässlichkeit der durch Hautmarker geschätzten Rotation in Höhe des Wirbels T10, verifiziert mit knochenimplantierten Pins an Kadaverexperimenten, für laterale Beugung an. Für die Maximalwerte dieser Rotation geben Percy

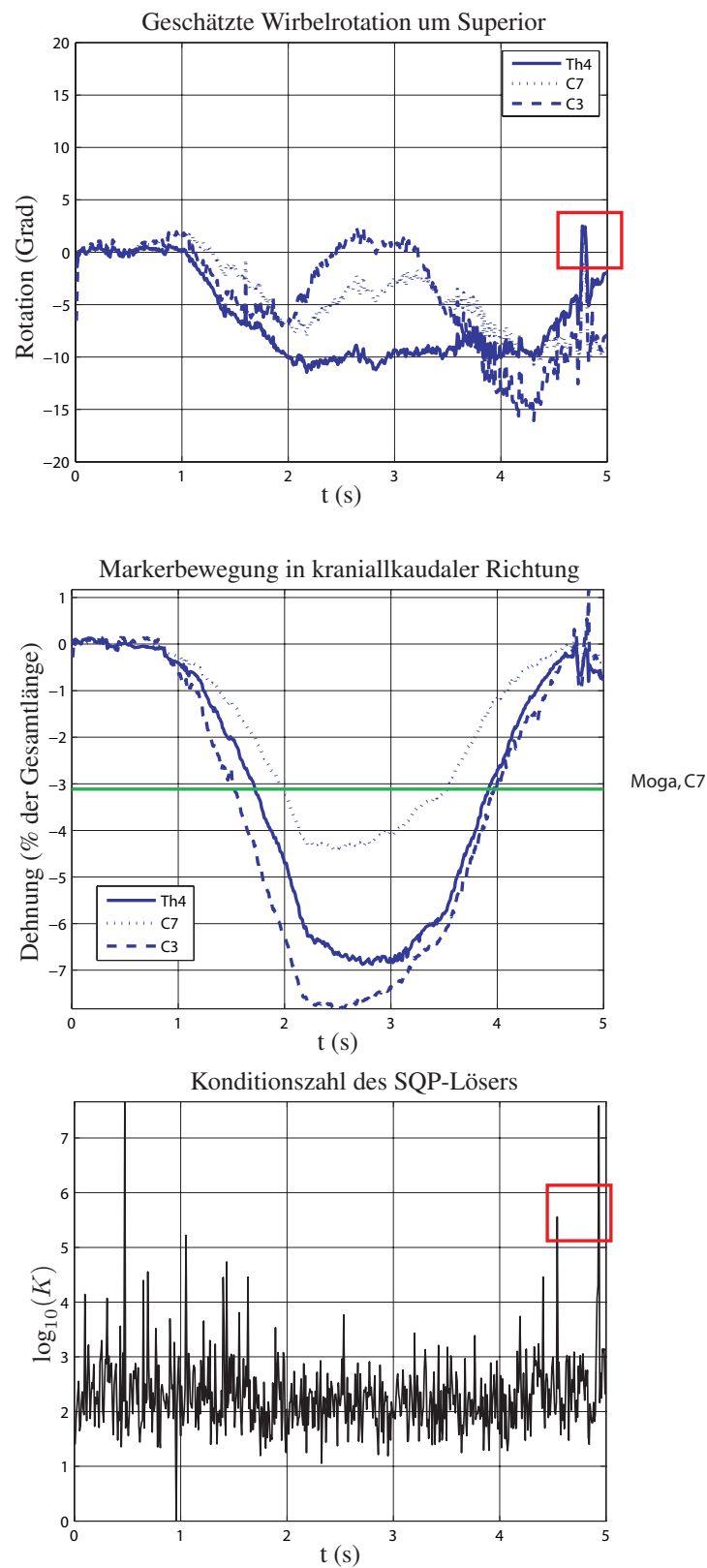


Abbildung 5.6: Geschätzte Rotation (oben), Hautbewegung (Mitte) und Konditionszahl bei Lösung

und Tibrewal (1984) entsprechende Werte an; die Maßzahl der prozentualen Abweichung der Hautposition vom Ausgangswert wird in Moga (2010) unter dem Namen prozentuale Dehnung (percent strain) für Flexionsbewegungen angegeben.

Stinton (2011) gibt für eine Lateralbeugung von 15° , vollzogen an Kadavern und mit Knochenpins verifiziert, eine Drehung des Wirbels T10 von ca. 5° nach rechts an, siehe Bild 5.5, oben, grüne Linie. Er gibt weiterhin eine über den Hautmarker L3 gemessene Rotation von ca. 3° **nach rechts** an, während die mit Knochenpins verifizierte Rotation laut seiner Arbeit ca. 5° **nach links** beträgt (grüne, gestrichelte Linie). Die in der vorliegenden Arbeit simulierte und über die Haut gemessene Rotation von ca. 10° nach rechts entspricht der in Pearcy und Tibrewal (1984) angegebenen, erwarteten Maximalrotation von ca. $8 - 12^\circ$. Dass die über die Hautmarker geschätzte Rotation in die falsche Richtung geht — nach rechts statt nach links — ist konsistent mit der Messung von Stinton. Die in Moga (2010) angegebene Hautdehnung von 10.7% für T10 und 41.7% für L3 (siehe Bild 5.5, Mitte, grüne Linien) entspricht den in der vorliegenden Arbeit geschätzten Werten.

Für den Thorax und Zervikalbereich fehlen diese Werte in der Literatur; jedoch zeigt Bild 5.3 eine unnatürliche simulierte Krümmung des Thoraxbereichs (grüne Markierung), die nicht mit der Steifigkeit dieses Bereichs in Einklang ist, vgl. Kapitel 2. Dies ist darin begründet, dass der Thorax mit denselben Steifigkeitsparametern w_β und w_γ modelliert wurde wie der Lumbarebereich. Die Haltung des Halsbereichs erscheint unnatürlich. Die Rotation von Thorax- und Zervikalbereich ist von Richtung und Betrag zumindest plausibel.

Insgesamt werden plausible Ergebnisse im Lumbarebereich erzielt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Modellierung in dieser Form nicht auf den Thoraxbereich ausgedehnt werden kann. Die enge zeitliche Korrelation zwischen Spitzen bzw. Sprüngen in den geschätzten Werten und der Konditionszahl legt nahe, dass das numerische Verfahren in einzelnen Fällen degeneriert und keine Lösung gefunden werden kann. Der Zeitaufwand des Verfahrens ist nicht zufriedenstellend, während die Statistik zur Konditionszahl in Tabelle 5.1 zeigt, dass man eine moderate Kondition und Anzahl an Iterationen des SQP-Lösers erwarten kann. Die genaue Ausgestaltung zur Formulierung und Implementierung ist daher noch nicht günstig und bedarf daher weiterer Ausarbeitung. Die Ergebnisse rechtfertigen jedoch eine radiologische Überprüfung der Methode für den Lumbarebereich in einem weiteren Einzelfall.

5.2 Einzelfallexperiment Torsionsbewegung

Da eine weitere radiologische Untersuchung innerhalb dieser Arbeit nicht möglich ist, wird ein geeigneter Satz von CT-Kurven aus bereits veröffentlichten Experimenten zur radiologischen Überprüfung genutzt; die MRT-Bilder des Probanden A werden zur Schätzung der Lage Hautmarker wiederverwendet.

5.2.1 Datenbasis

Die Überprüfung erfolgt anhand einer an der Rush University, Chicago, Illinois (USA) durchgeführten Studie zu definierter Torsion der Lendenwirbelsäule, siehe Ochia u. a. (2006). Darin wird nach einem standardisierten Protokoll Becken (d.h. *proximal* zur Lendenwirbelsäule) und Schulter (d.h. *distal* zur Lendenwirbelsäule) an der Symmetrieachse eines Torsiometers (*Torsion Rotation Control Apparatus*, TRCA) zentriert ausgerichtet und mit Gurten suppin fixiert; Polster im Lendenbereichs minimieren Verformungen infolge der Schwerkraft. Die Probanden werden in definierter Oberkörpertorsion von 0° (neutral), 30° rechts/links und 50° rechts/links im CT radiologisch vermessen; die Zentrierungsprozedur wird vor jeder Messung wiederholt. Ergeben sich in der Untersuchung pathologische Veränderungen der Wirbelsäulenlinie, wird der betreffende Proband aus der Studie ausgeschlossen.

Die CT-Messungen sind als Punktwolken der Wirbel S1, L1-L5 und Th12 zu Voxel der Kantenlänge 1 mm diskretisiert. Zur Reduzierung der Strahlenbelastung wird nur der Lumbarebereich vermessen. Im vorliegenden Fall ist dadurch der Wirbel Th12 nicht in allen Messungen vollständig abgebildet, die hintere Wirbelmauer und das Wirbelmauerzentrum sind jedoch zu identifizieren.

Die Prozedur wird im Ganglabor an einem Probanden B (männlich, 46 Jahre, 72 Kg, 1,79m Körpergröße, asymptomatisch) aus dieser Studie wiederholt. Dazu wird der TRCA senkrecht im Ganglabor aufgerichtet, siehe Bild 5.7. Hautmarker werden in der Nähe der hinteren Dornfortsätze der Wirbel S1 (Sacrum)=M₁, L4=M₂, L3=M₃ und L1=M₄ platziert; um die Lage und Orientierung der Basis ossis sacri \mathcal{K}_2^0 zu schätzen werden zusätzlich Marker an den Punkten linker hinterer Beckenbogen (LSPI=M₅) und rechter hinterer Beckenbogen (RPSI=M₆) platziert. Der Proband wird zentriert, die definierten Torsionen 0° (neutral), 30° rechts/links und 50° rechts/links werden eingebracht und die Hautmarkerpositionen mit einem 12-Kamera optoelektronischen Motion-Capture System vom Typ Oqus, Qualisys, Gothenburg, Schweden, bei einer Abtastrate von 120 Hz gemessen.

Die Indizes $p = 1, \dots, 5$ werden für die übrigen Ausführungen fest definiert für die Haltun-

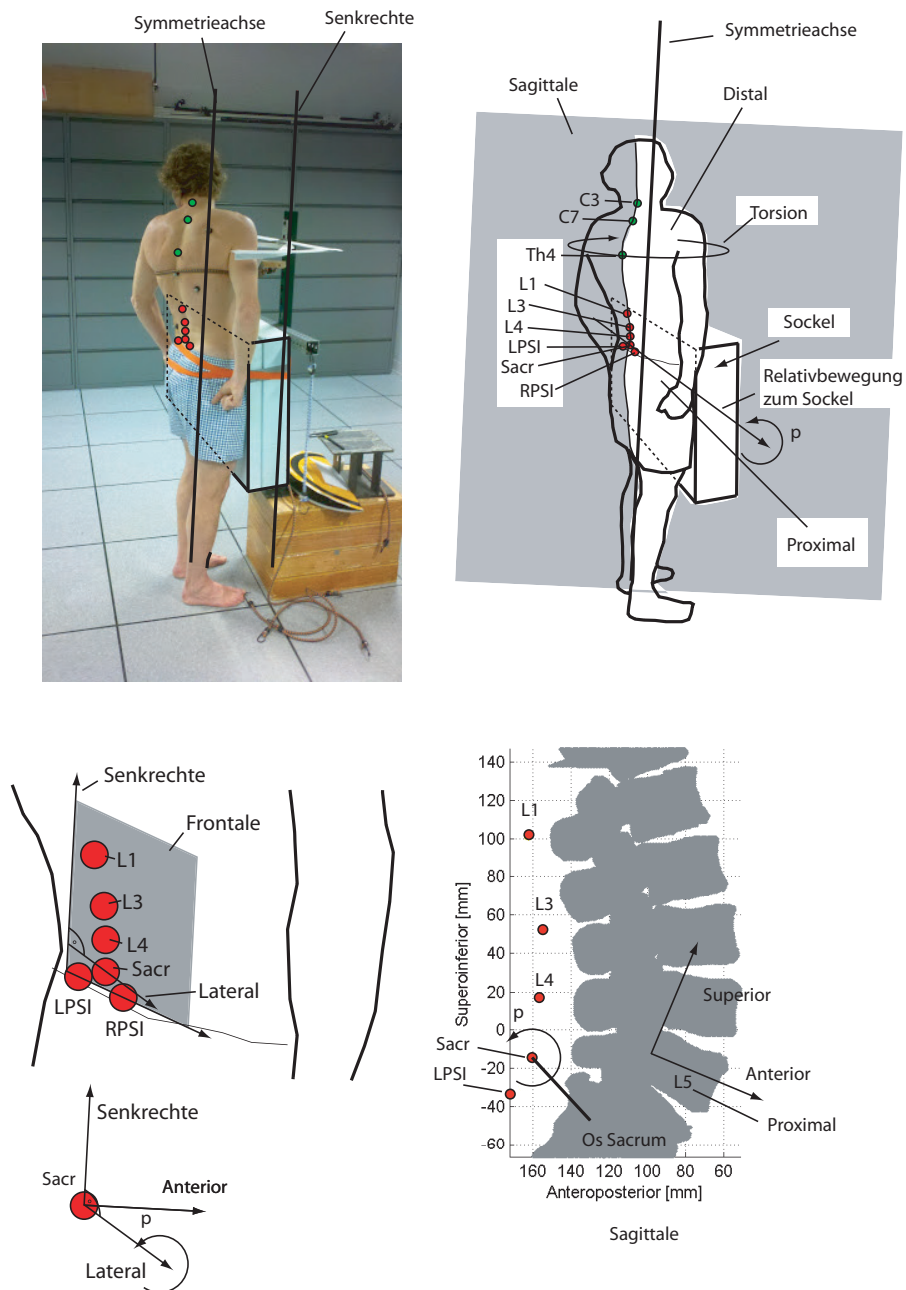


Abbildung 5.7: Proband B in neutraler Haltung am TRCA (oben), Definition des sakrumfesten Koordinatensystem K_1 (unten, links), Ausrichtung der Wirbelkörper (unten, links). Foto: Dr. Aléjandro Espinoza Orias, mit Genehmigung zur Reproduktion.

gen 30° links rotiert=1, 50° links rotiert=2, 30° rechts rotiert=3, 50° rechts rotiert=4 und neutral=5. Für die Wirbelkörper V_i werden die festen Indizes $i = 0, \dots, 6$ eingeführt in der Reihenfolge Os sacrum=0, L5=1, ..., L1=5, Th12=6 entsprechend der Konvention in Abschnitt 4.1.1. Diese Wirbelkörper bilden die Modellwirbel für das Bewegungssegment der Lendenwirbelsäule nach Abschnitt 4.1.1, das damit definierte Splinekurven-Modell hat sechs Segmente. Die stereophotogrammetrisch gemessenen Hautmarkerpositionen in der Haltung p werden mit ${}^0r_{M_j,p}$ notiert für die definierten Hautmarker $M_j, j = 1, \dots, 7$. Die MRT-Messung des Probanden A, sowie die in Abschnitt 5.1.2 daraus abgeleiteten Größen werden als Hilfsmessung mit dem Index $p = 6$ notiert.

Eine Analyse der Literatur und des Versuchsaufbaus ergibt folgende Unsicherheiten in der Auswertung:

a) Unsicherheiten zwischen Rotationsmessungen an Proband B:

Proband B ist in neutraler Haltung zentriert an der Symmetrieachse des TRCA ausgerichtet, so dass die Sagittalebene des Probanden an der Symmetrieachse ausgerichtet ist. Die Autoren Ochia u. a. (2006) geben einen Fehler in Lage und Orientierung der Wirbelkörper von 0,1mm und 1° zwischen Messungen über alle Teilnehmer der Studie an. Sie führen dafür die Hauptachsenform der Punktwolken zur Bestimmung von körperfesten Koordinaten unter der Bezeichnung „allgemeine Eigenvektor-Methode“ an. Geringe Relativbewegungen des Schultersegments zur Symmetrieachse zwischen den Messungen, also distal (siehe Bild 5.7, oben) zur Lumbarkurve haben nur geringe Auswirkungen auf die Lumbarkurve und werden im weiteren vernachlässigt.

Während der stehenden Messung ist das Becken des Probanden B in festem Kontakt mit dem Sockel des Mechanismus, so dass das Becken frontal am Sockel ausgerichtet ist; der Abstand des Beckens zum Sockel ist annähernd konstant, siehe Bild 5.7, oben rechts. Relativbewegung des Beckens zum Sockel in Richtung Superiorinferior, also parallel zur Symmetrieachse des TRCA, ist durch die Fixierung an Schulter und Becken nur gering möglich und wird vernachlässigt. Die Symmetrieachse des TRCA ist annähernd parallel zur senkrechten Laborachse. Auf der Länge des Lumbarsegments von ca. 150 mm bewirken Abweichungen der Symmetrieachse von der Senkrechten bis zu 5° eine maximale räumliche Abweichung von ca 14 mm, dieser wird hier vernachlässigt. Der am weitesten proximale Wirbel, L5 ist zentriert am Sockel ausgerichtet; dadurch ist die lokale Sagittale annähernd parallel zur globalen Sagittale, siehe Bild 5.7, unten. Relativbewegungen in anteroposteriorer Richtung – also im rechten Winkel zur Kontaktfläche an der Sockelfront – werden vernachlässigt.

Relativbewegungen des Beckens in Richtung Lateral – also parallel zum Sockel und

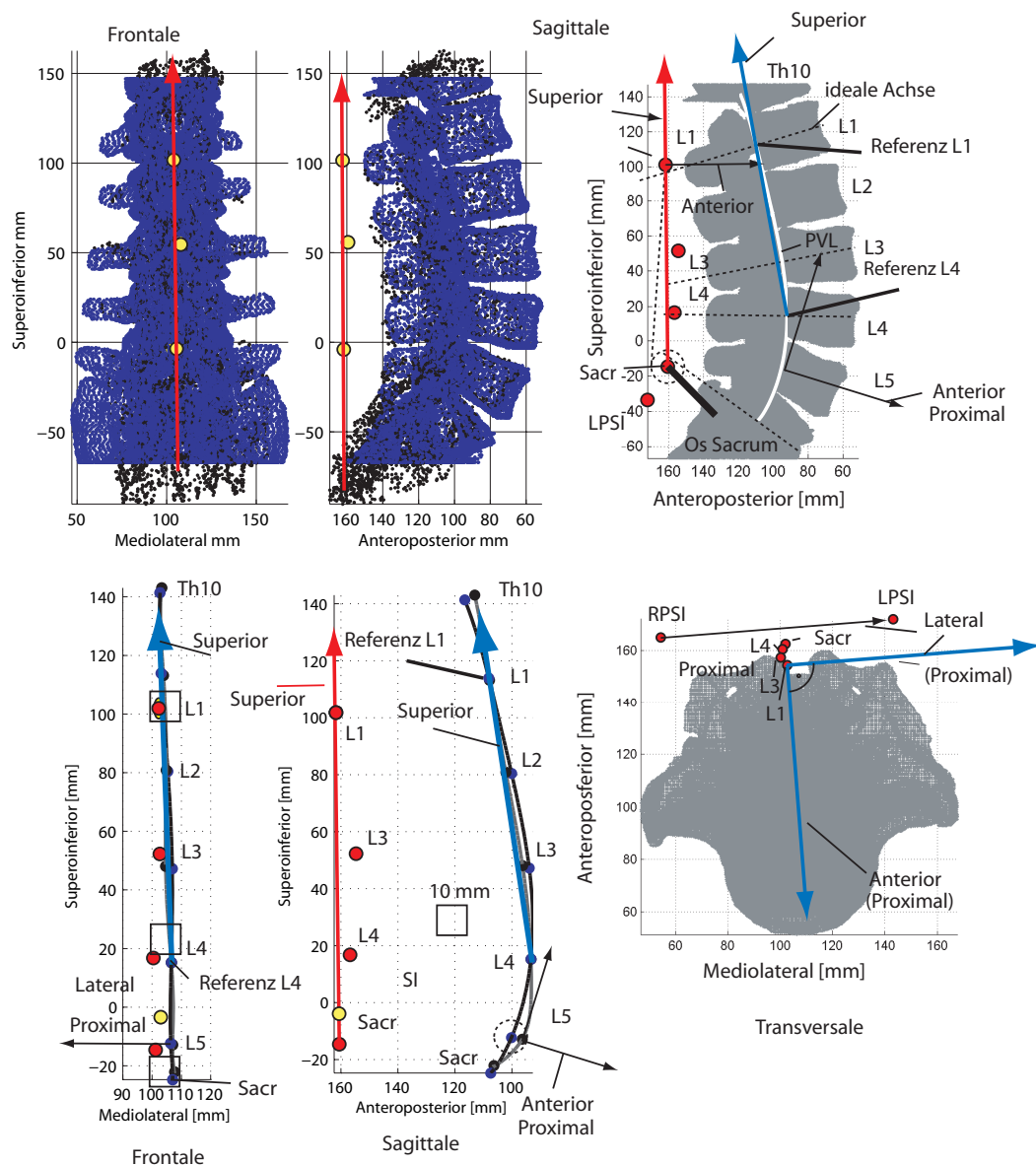


Abbildung 5.8: Abbildung der CT-Messung (blaue Punkte) auf die MRT-Messung (schwarze Punkte) (oben), Abbildung der Hautmarker auf die CT-Messung (unten)

zum Boden – sind durchaus möglich, siehe Bild 5.7, oben. Tritt eine bedeutende Verschiebung des Beckens zum Sockel auf, kann sich die Orientierung des Beckens zum Sockel signifikant ändern, so dass die Messung nicht verwertet werden kann. Ansonsten ist die Orientierung des Beckens zum Sockel des Mechanismus – bei festem Stand des Probanden auf dem Boden – annähernd fest. Die Orientierung der Basis ossis sacri ist durch diese spezielle Ausrichtung in neutraler Haltung bis auf eine Rotation in der Sagittalen bestimmt.

Die Schwerkraft bewirkt eine geringe Verformung der Lumbarkurve. Laut Mauch u. a. (2010) bewirkt eine Änderung der Haltung von liegend zu stehend eine Stauchung der Lendenwirbelsäule von 1-2 mm pro Wirbel, sowie eine Änderung der lordotischen Krümmung ca 6°. Diese Krümmungsänderung wurde im ursprünglichen Studienprotokoll korrigiert; sie wird daher vernachlässigt.

- b) Unsicherheiten in der Markerplatzierung: Die hinteren Dornfortsätze bilden die Symmetrieebene des Rücken in der Sagittalebene und sind gut palpierbar. Daher wird angenommen, dass die Markerpositionen ausreichend Nahe der Sagittalebene liegen. In Kranialkaudaler Richtung ist die Position der hinteren Dornfortsätze nicht durch Palpierung exakt zu bestimmen, vgl. Labesse u. a. (1996) und Chiari u. a. (2005). In der MRT Messung des Probanden A ist erkennbar, dass der Hautmarker am Wirbel L3 etwas zu hoch platziert ist, während die übrigen Marker korrekt platziert erscheinen. Den Fehler infolge Markerplatzierung geben Chiari u. a. (2005) mit durchschnittlich 5.3 mm bis zu 14 mm (maximal) an.

In Bild 5.7 oben ist im Foto sichtbar, dass die Hose des Probanden Verschiebung der Hautmarker LSPI und RSPI bewirkt. Der Abstand dieser Hautmarker zum Sakrumpodest und zum Sockel des TRCA ändert sich dadurch geringfügig. Es wird angenommen, dass diese Hautmarker über Messungen hinweg annähernd festen Abstand zum Sockel und zur Basis ossis sacri haben, siehe Bild 5.8, unten rechts.

- c) Unsicherheiten durch anatomische Unterschiede zwischen Proband A und Proband B: In vergleichenden Studien variiert der Abstand der Dornfortsätze zur hinteren Wirbelmauer um ca 7- 12 mm über Populationen, siehe Wolf u. a. (2001), Lien u. a. (2007) und Abuzayed u. a. (2010). Für die Variation des Weichteilgewebes über den Dornfortsätzen fehlen Literaturwerte, bei Proband A ist der Abstand der Hautmarker zu den hinteren Dornfortsätzen jedoch geringer als 20 mm. Ein zusätzlicher Fehler über die Größenordnung der angenommen 12 mm für Variation der Dornfortsätze hinaus erscheint unwahrscheinlich.

Die Probanden weisen keine pathologische Krümmung in der Frontalen aus. Sie wur-

den beide in annähernd suppler, neutraler Haltung vermessen, zusätzlich wurde bei Proband B die Lumbarkurve an der Symmetrieachse des TRCA ausgerichtet und durch Polsterung gegen Abweichung von der neutralen Haltung korrigiert. Die Lumbarkurve ist zwischen Proband A und B in der Sagittalen unterschiedlich gekrümmt, besonders im Bereich S1-L5-L4. Die Krümmung im Bereich L4-L3-L2-L1 ist bei den Probanden vergleichbar, siehe Bild 5.8. Daher dient im folgenden der Bereich L4-L3-L2-L1 als Referenz für die Lumbarsegmente der Probanden A und B; L4 wird im folgenden proximales Ende dieses Segments genannt, siehe Bild 5.8, unten.

Es bestehen also a-priori Unsicherheiten in den Messungen von mindestens etwa 10 mm. Für einen qualitativen Vergleich von CT-Messung und Simulationsergebnissen ist diese Genauigkeit ausreichend und bestehende Fehler werden in Kauf genommen. Eine exakte Quantifizierung dieser Fehler kann nicht angegeben werden. Ergeben sich in der Auswertung bedeutende Abweichungen oder Inkonsistenzen in den Annahmen, werden die betreffenden Messungen nicht bewertet.

5.2.2 Vereinfachte Annahmen

Die Schätzung Position der Basis ossis sacri des Probanden B im Ganglabor \mathcal{K}_2^0 geschieht nach folgenden vereinfachten Annahmen auf Basis der Ausführungen in Abschnitt 5.2:

1. Die Basis ossis sacri ist starr mit dem Sockel des TRCA verbunden. Mit ihm ist der Sacrum-Marker M_1 starr verbunden.
2. Die Sagittale des Probanden B, und mit ihm die Lumbarkurve und Hautmarker, ist in neutraler Haltung ideal senkrecht an der Symmetrieachse des TRCA ausgerichtet.
3. Die Basis ossis sacri und die Marker M_6 (LSPI) und M_7 (RPSI) sind parallel zum Sockel des Mechanismus ausgerichtet; die Richtung anterior ist waagerecht und orthogonal zum Sockel. Anteriore Richtung und Senkrechte spannen die Sagittalebene des Probanden B auf.

Dazu wird ein beckenfestes Koordinatensystem \mathcal{K}_1 (siehe Bild 5.7, unten) in Laborkoordinaten in der Haltung p wie folgt definiert:

1. Der Ursprung ist im Hautmarker am Sakrum, ${}^0\mathbf{r}_{M_1,p}$,
2. die senkrechte Raumachse dient als superiore Richtung: ${}^0\mathbf{e}_x = [0\ 0\ 1]^T$,

3. die anteriore Richtung ist zur Senkrechten des Labors und zur Verbindungslinie Marker $\underline{r}_{M_{6,p}}$ (LPSI) und $\underline{r}_{M_{7,p}}$ (RPSI) orthogonal:

$${}^0\underline{e}_y = \frac{({}^0\underline{r}_{M_{6,p}} - {}^0\underline{r}_{M_{7,p}}) \times {}^0\underline{e}_x}{\|({}^0\underline{r}_{M_{6,p}} - {}^0\underline{r}_{M_{7,p}}) \times {}^0\underline{e}_x\|}, \quad (5.3)$$

4. die laterale Richtung ist gegeben als

$${}^0\underline{e}_z = {}^0\underline{e}_x \times {}^0\underline{e}_y. \quad (5.4)$$

Die zu dieser Richtung normale Ebene ist die Sagittale.

Zur einfacheren Darstellung wird im folgenden ein Koordinatensystem \mathcal{K}_1 unabhängig von der Messung p notiert und Unsicherheiten gemäß Abschnitt 5.2 zunächst vernachlässigt.

Für die CT-Messungen des Probanden B werden nach Ochia u. a. (2006) sakrumfeste Koordinatensysteme \mathcal{K}_3 durch Hauptachsenform der Punktwolken des Os Sacrum eingeführt. Sie wird in dieser Arbeit durch Singulärwertzerlegung der Kovarianzmatrizen dieser Punktwolken bestimmt. Für die Punktwolken des Os sacrum in der Haltung p , bestehend aus m_p Punkten:

$${}^0\underline{r}_{1,m}^p, m = 1, \dots, m_p, \quad (5.5)$$

ist der Mittelwert der Koordinaten (Schwerpunkt der Massepunkte) definiert als

$${}^0\underline{\hat{r}}^p = \frac{1}{m_p} \sum_{m=1}^{m_p} {}^0\underline{r}_{1,m}^p, \quad (5.6)$$

die positiv-definiten, $3 \times m_p$ dimensionalen Kovarianzmatrizen der Punktekoordinaten sind durch die quadrierten Abweichungen vom Mittelwert definiert:

$$\mathbf{COV}_p = ({}^0\underline{r}_{1,m} - {}^0\underline{\hat{r}}^p)({}^0\underline{r}_{1,m} - {}^0\underline{\hat{r}}^p)^T, \quad m = 1, \dots, m_p, \quad (5.7)$$

durch die Singulärwertzerlegung der Kovarianzmatrizen

$$\mathbf{U}_p \mathbf{S}_p \mathbf{V}_p = \mathbf{COV}_p, \quad (5.8)$$

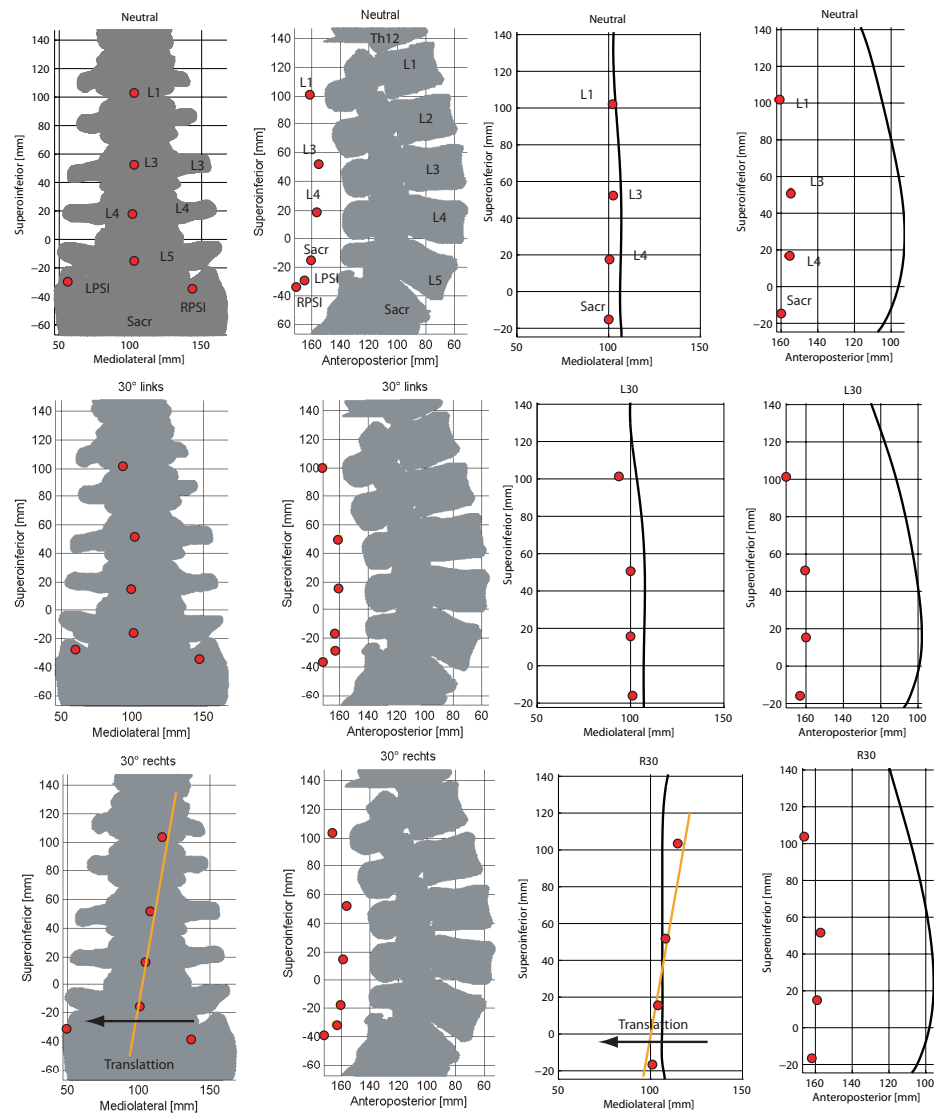


Abbildung 5.9: Abbildung der Marker auf die CT Kurven (links) und die PVL (rechts) für Posen Neutral, L30, R30.

ist die unitäre Matrix der Eigenvektoren \mathbf{U}_p der Punktwolke des Os sacrum in Haltung p definiert, vgl. Ochia u. a. (2006), und das sakrumfeste Koordinatensystem in Haltung p wird definiert durch die homogene Transformationsmatrix

$${}^0\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & {}^0\hat{\underline{r}}_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

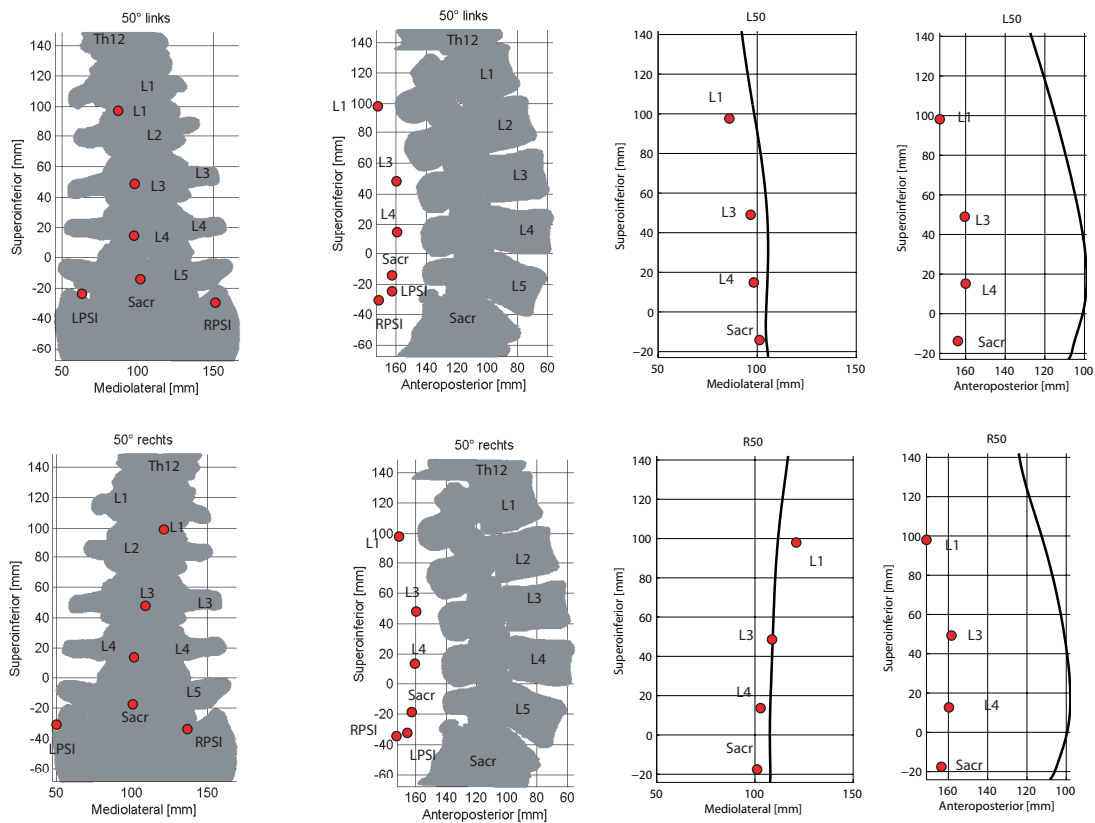


Abbildung 5.10: Abbildung der Marker auf die CT Kurven (links) und die PVL (rechts) für Posen R50, L50.

Zur einfacheren Darstellung wird ein einzelnes Koordinatensystem \mathcal{K}_3 unabhängig von p notiert und Unsicherheiten gemäß Abschnitt 5.2 zunächst vernachlässigt. Die Punktwolken sind in Hauptachsenform übereinstimmend mit den Ergebnissen von Ochia u. a. (2006) bis auf einen Diskretisierungsfehler von 0,5 mm in Deckung. Die WMZ und die lokalen klinischen Achsen der Wirbelkörper V_i , $i = 0, \dots, 6$ werden durch Feinverschiebungen von 1 mm mit drei translatorischen Freiheitsgraden entlang den klinischen Achsen und Feinrotationen von 1° mit drei rotatorischen Freiheitsgraden bestimmt, wie im Abschnitt 5.1.2 beschrieben.

Um kleine Unsicherheiten in der Segmentierung der Wirbelkörper und händischer Bestimmung zuzulassen, wird jede der fünf CT-Messungen separat bearbeitet.

Die so bestimmten WMZ in der Haltung p werden mit ${}^3\underline{p}_{i,p}$, $i = 0, \dots, 6$ notiert, die lokalen klinischen Achsen mit ${}^3\underline{e}_x^{i,p}$, ${}^3\underline{e}_y^{i,p}$ und ${}^3\underline{e}_z^{i,p}$. Die Referenzkurve ${}^3\underline{r}_0(s)$ und Modellkurven für die übrigen Haltungen und für die Hilfsmessung $p = 6$, ${}^3\underline{r}(s)_p$ werden wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben aus den ermittelten WMZ ${}^0\underline{p}_{i,p}$, $i = 1, \dots, 6$ bestimmt. Proband A ist in der MRT Messung suppin und neutral annähernd an den Achsen des MRT-Geräts ausgerichtet, siehe Bild 5.1; zur Schätzung der räumlichen Ausrichtung des Probanden A werden die Richtungen des MRT-Koordinatensystem mit ${}^3\underline{e}_x^{1,6}$ für Superior, ${}^3\underline{e}_y^{1,6}$ für anterior und ${}^3\underline{e}_z^{1,6}$ für Lateral notiert.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 5.2 werden die Hautmarker des Probanden A ($p = 6$) auf die neutrale Haltung des Probanden B ($p = 5$) nach folgenden vereinfachten Annahmen abgebildet:

1. Die Ausrichtung der Lumbarsegmente von Proband A und Proband B ist bis auf kleine Rotation in der Sagittalen und anatomische Unterschiede in sagittaler Krümmung identisch.
2. Die Lumbarsegmente können so skaliert und orientiert werden, dass i) die Sagittalebene parallel ausgerichtet sind und ii) das Segment L4-L3-L2-L1 in Deckung gebracht wird. Dieses Segment wird auf den proximalen Wirbel L4 als Ursprung, sowie die Verbindungslinie zwischen L4 und L1 reduziert, siehe Bild 5.8, blaue Achse.
3. Der Abstand der WMZ der Wirbel L4 und L1 von der Sagittalebene werden vernachlässigt; die superiore Richtung des Segments L4-L3-L2-L1 wird durch die Verbindungslinie L4-L1 definiert. Diese Linie spannt mit der anterioren Achse des proximalen Wirbels L5 die Sagittale auf. Die Richtung anterior des Segments L4-L3-L2-L1 ist orthogonal zur lokalen lateralen Achse dieses Wirbels, ${}^3\underline{e}_z^{1,5}$, bzw. zur lokalen Achse des MRT für Proband A, ${}^3\underline{e}_z^{1,6}$, siehe Bild 5.8, unten links.
4. Die Abstände der Hautmarkerpositionen zur Sagittalebene werden vernachlässigt. Geringe Unterschiede in der Krümmung im Bereich L4-L5-S1 werden in Kauf genommen.
5. Die Hautmarkerpositionen sind bis auf die aufgezählten geringen Abweichungen und Fehler infolge Platzierung gleich. Die Verbindungslinie der beiden äußersten Hautmarker am Lumbarsegment, L1 und Sakrum, ist in neutraler Haltung daher nach Projektion auf die Sagittale in MRT, CT und Ganglabor parallel, siehe Bild 5.8, rote Achse.

Der Skalierungsfaktor s wird nach Punkt 3., ii) definiert durch den Abstand zwischen Sakrum und L1:

$$s = \frac{\|\underline{p}_6^5 - \underline{p}_0^5\|}{\|\underline{p}_6^6 - \underline{p}_0^6\|}. \quad (5.9)$$

Für die Abbildung der Segmente L4-L3-L2-L1 in MRT ($p = 6$) und CT, neutral ($p = 5$) wird das Koordinatensystem \mathcal{K}_4^p definiert, mit Ursprung in Wirbel L4, ${}^3\underline{p}_{5,p}$, siehe Bild 5.8, blaue Achsen. Die Orientierung ist gegeben durch:

$${}^3\underline{e}_x = \frac{{}^3\underline{p}_{5,p} - {}^3\underline{p}_{1,p}}{\|{}^3\underline{p}_{5,p} - {}^3\underline{p}_{1,p}\|} \text{ (Verbindungsline L1-L4)} \quad (5.10)$$

$${}^3\underline{\hat{e}}_y = \frac{{}^3\underline{e}_z^{1,p} \times {}^3\underline{e}_x}{\|{}^3\underline{e}_z^{1,p} \times {}^3\underline{e}_x\|} \text{ (Anterior, Proximal)} \quad (5.11)$$

$${}^3\underline{e}_z^{1,p} = {}^3\underline{e}_x^{1,p} \times {}^3\underline{e}_y^{1,p} \text{ (Lateral, Proximal)} \quad (5.12)$$

Die vereinfachten Annahmen zur Abbildung der MRT-Messung auf die CT-Messung besagen, dass \mathcal{K}_4^5 auf \mathcal{K}_4^6 abgebildet wird. Unsicherheiten in der Bestimmung werden wie vorher vernachlässigt und zur Vereinfachung ein einzelnes Koordinatensystem \mathcal{K}_4 für das Segment L4-L3-L2-L1 notiert. Nach den Annahmen ist die Lage der Basis ossis sacri im Ganglabor über alle Haltungen $p = 1, \dots, 5$ hinweg bis auf eine Rotation φ in der Sagittalebene um den Hautmarker am Sakrum definiert: \mathcal{K}_4 und \mathcal{K}_1 sind jeweils an der Sagittalebene ausgerichtet. Diese Orientierung wird in neutraler Haltung aus den Annahmen zur Abbildung der Hautmarker auf die MRT-Messung des Probanden A geschätzt durch (siehe Bild 5.8):

1. Die Position des Hautmarkers am Wirbel L1 im sakrumfesten Koordinatensystem \mathcal{K}_1 , ${}^4\underline{r}_{M_{1,5}}$ und in \mathcal{K}_4 , ${}^4\underline{r}_{M_{1,6}}$.
2. Die Verbindungsline zwischen den Hautmarkern L1 (M_4) und Sakrum (M_1), projiziert auf die Sagittalebene dieser Koordinatensysteme (rote Linie in Bild 5.8, oben):

$$\varphi = \arctan((\underline{r}_{M_{4,6}} - \underline{r}_{M_{1,6}})^T \underline{e}_y^6, (\underline{r}_{M_{4,6}} - \underline{r}_{M_{1,6}})^T \underline{e}_x^6)) - \quad (5.13)$$

$$\arctan((\underline{r}_{M_{4,5}} - \underline{r}_{M_{1,5}})^T \underline{e}_y, (\underline{r}_{M_{4,5}} - \underline{r}_{M_{1,5}})^T \underline{e}_x)). \quad (5.14)$$

Die sichtbaren Fehler bzw. Inkonsistenzen sind in der Größenordnung von etwa 10 mm, zu sehen in der Abweichung der lumbaren Kurven, der hinteren Dornfortsätze und Abweichung

Tabelle 5.2: Performance-Zahlen des Lösungsverfahrens

	Mittelwert	Min	Max
Anzahl Iterationen	56,2	44	69
CPU Zeit (s)	4,46	3,49	5,47
Konditionszahl bei Lösung	40,72	19,54	81,18

der Hautmarker von der Sagittalebene, siehe Bild 5.8, unten. Zusätzliche Unsicherheiten bestehen in Anatomie und Bewegungen des Weichgewebes, Markerplatzierung und Verletzungen der a-priori Annahmen, die nicht quantifiziert werden können. Man bemerkt jedoch, dass die geschätzten Hautmarkerpositionen den idealen Positionen nahe scheinen, zu erkennen an den Strahlen durch PVL und hintere Dornfortsätze, mit Ausnahme des Hautmarkers L3; dieser erscheint zu hoch platziert, siehe Bild 5.8, oben. Die Schätzung wird daher für die neutrale Haltung akzeptiert und auf alle Haltungen ausgeweitet. Man erhält die geschätzten Positionen der WMZ und Modellkurven im sakrumfesten Koordinatensystem, ${}^1\mathbf{p}_{i,p}$, und die daraus abgeleiteten Modellkurven ${}^1\mathbf{r}(s)^p$ für die bewegten Haltungen $p = 1, \dots, 4$ und die neutrale Haltung $p = 5$.

Um den Einfluss kleiner Abweichungen von den Annahmen zu prüfen, werden die Abstände der Hautmarker $\mathbf{r}_{\mathbf{M}_{j,p}}$, $j = 1, \dots, 4$ zu den Modellkurven ${}^1\mathbf{r}(s)^p$ bestimmt, in dem der Parameterraum der Modellkurven in 500 gleichverteilte Punkte $s_{\delta_t} = t \cdot \ell_6$, $t = 1, \dots, 500$ diskretisiert und der Abstand $d_{j,p}$ durch vollständige Suche nach dem Minimum genähert wird, vgl. Abschnitt 4.2:

$$d_{j,p} = \arg \min_{s_j} \{ \| {}^1\mathbf{r}_{\mathbf{M}_{j,p}} - {}^1\mathbf{r}(s_j)^p \| \}. \quad (5.15)$$

In Abbildung Bild 5.11 sind die so geschätzten Abstände $d_{j,p}$ abgebildet. Die Abstände variieren in einem Bereich von ca 1 mm um die Abstände in neutraler Haltung, dies entspricht in etwa dem minimalen Fehler in den händisch ermittelten PWZ. Die Schätzwerte werden daher als Konsistent akzeptiert. Die geschätzten Hautmarkerpositionen ${}^1\mathbf{r}_{\mathbf{M}_{j,p}}$ an den beweglichen Wirbeln des Kurvenmodells $j = 2, \dots, 4$, die Abstände $d_{j,p}$ und die Kurve in der neutralen Haltung $p = 5$, ${}^1\mathbf{r}(s)^5$ werden zur Schätzung der i-PVL nach der Methode aus Kapitel 4 benutzt. Als Steifigkeitsparameter werden die in Abschnitt 5.1.2 ermittelten Werte $w_\beta = w_\gamma = 1$, $w_k = 1000$, $t_k = \frac{18}{\pi}$ übernommen.

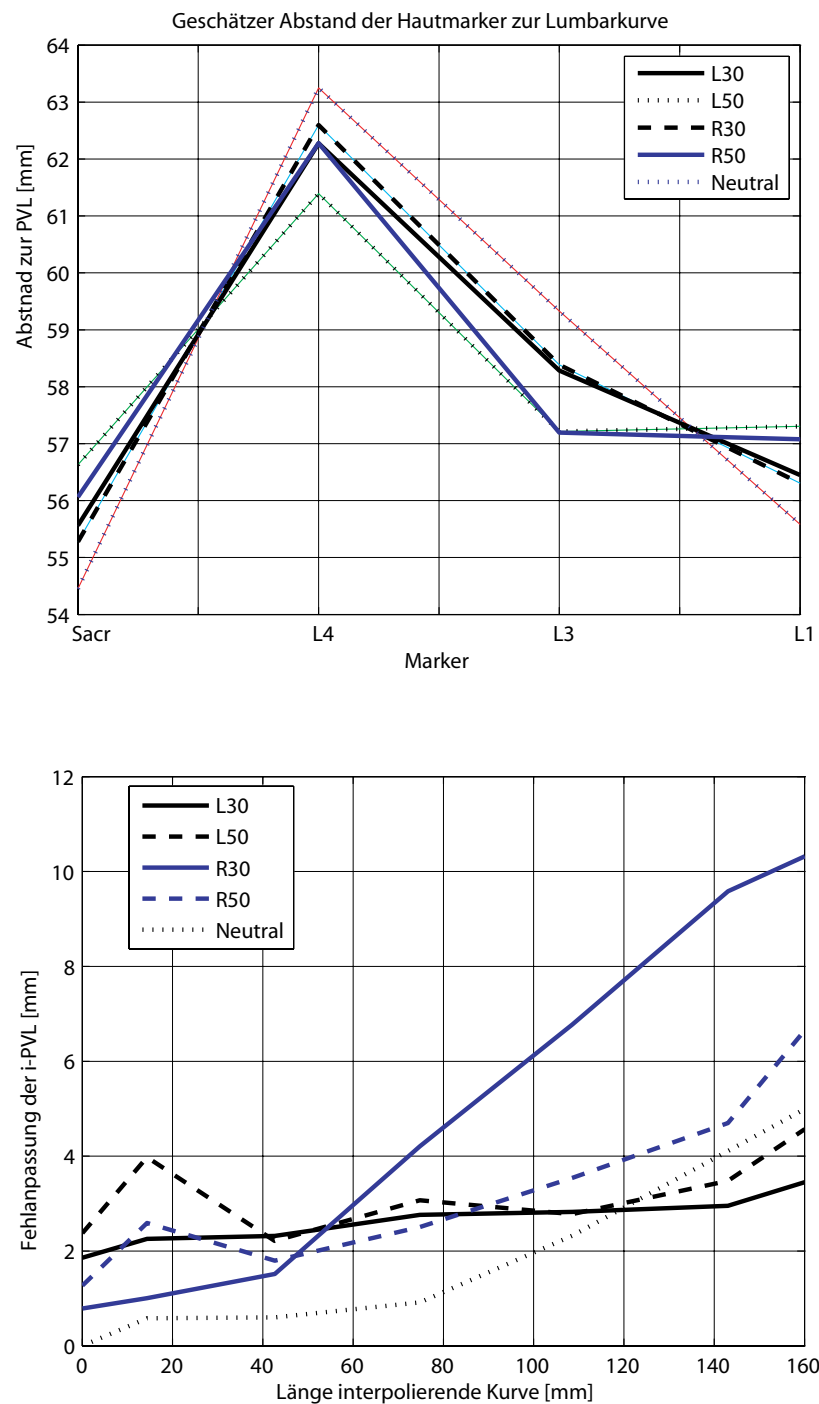


Abbildung 5.11: Abstand der Hautmarker zur PVL (oben), Fehlanpassung der i-PVL (unten)

5.2.3 Ergebnisse

Die geschätzten Positionen der Wirbelkörper und Hautmarker sind in Bild 5.9 und Bild 5.10 zu sehen. Die geschätzten i-PVL und aus den CT-Punktwolken bestimmten WMZ sind in Bild 5.12 abgebildet. Es ergeben sich geringe Abstände der händisch bestimmten WMZ (blau) zu der geschätzten i-PVL. In Bild 5.11 findet sich als Maß für die Fehlanpassung der i-PVLs der Abstand der WMZ von den geschätzten i-PVL für jede Haltung. In der Pose R30 geht dieser Fehler über 10 mm hinaus, für die restlichen Haltungen bleibt der Anpassungsfehler unterhalb von 7 mm. In der Haltung R30 zeigt ein Abgleich von Hautmarkerpositionen und Wirbelkörpern eine sichtbare Translation des Sakrums gegenüber der Markermessung. Es erscheint daher wahrscheinlich, dass während der Ganglabormessung dieser Haltung eine signifikante Verschiebung des Beckens von Proband B entlang des Sockels stattgefunden hat. Diese Messung wird daher nicht weiter bewertet. Eine gründlich visuelle Inspektion der übrigen Messungen zeigt keine offensichtliche Diskrepanz oder Inkonsistenzen in den vereinfachten anfänglichen Annahmen. Auf der Höhe des Markers L1 ist der Fehler in diesen Messungen etwa 4 mm.

Tabelle 5.2 zeigt die numerischen Performance-Zahlen des zugrundeliegenden Optimierungsproblems für das symbolische Wirbelsäulenmodell. Es ergibt sich eine moderate bis gute Kondition bei vertretbarem Rechenaufwand zur Lösung mithilfe des SQP-Lösers.

5.2.4 Diskussion

Für die nach Auswertung der Ergebnisse verwertbaren Messungen bleibt der Anpassungsfehler unterhalb der a-priori angenommenen Fehlern von ca. 10 mm bei einem moderaten numerischen Aufwand. Im Experiment es ergibt sich eine plausible Anpassung der geschätzten PVL an die radiologischen Messungen im Lumbarebereich. Aufgrund der geringen Datenbasis und unbekannten Unsicherheiten ist keine Verbesserung dieses Ergebnis ohne neuerliche Messungen zu erwarten. Legt man die geschätzten Normalabstände von ca. 60 mm zugrunde, entspricht eine Abweichung unter 4 mm auf Höhe des Markers L1 einem Fehler in der Rotation um die superiore Achse unterhalb von 4° . Dies ist in dem Bereich, den Stinton (2011) für den Fehler in Rotation für diesen Marker angibt.

Diese Schätzung erfolgt auf Basis von vier Hautmarkern entlang des Lumbarsegments, was der in der Zielsetzung formulierten Funktionalität des Verfahrens unter Benutzung weniger Hautmarker entspricht. Insofern wurden die Zielsetzungen aus Abschnitt 2.4 erreicht. Die sich ergebende Genauigkeit für Rotation im Lumbarebereichs ist sehr ermutigend, da zur

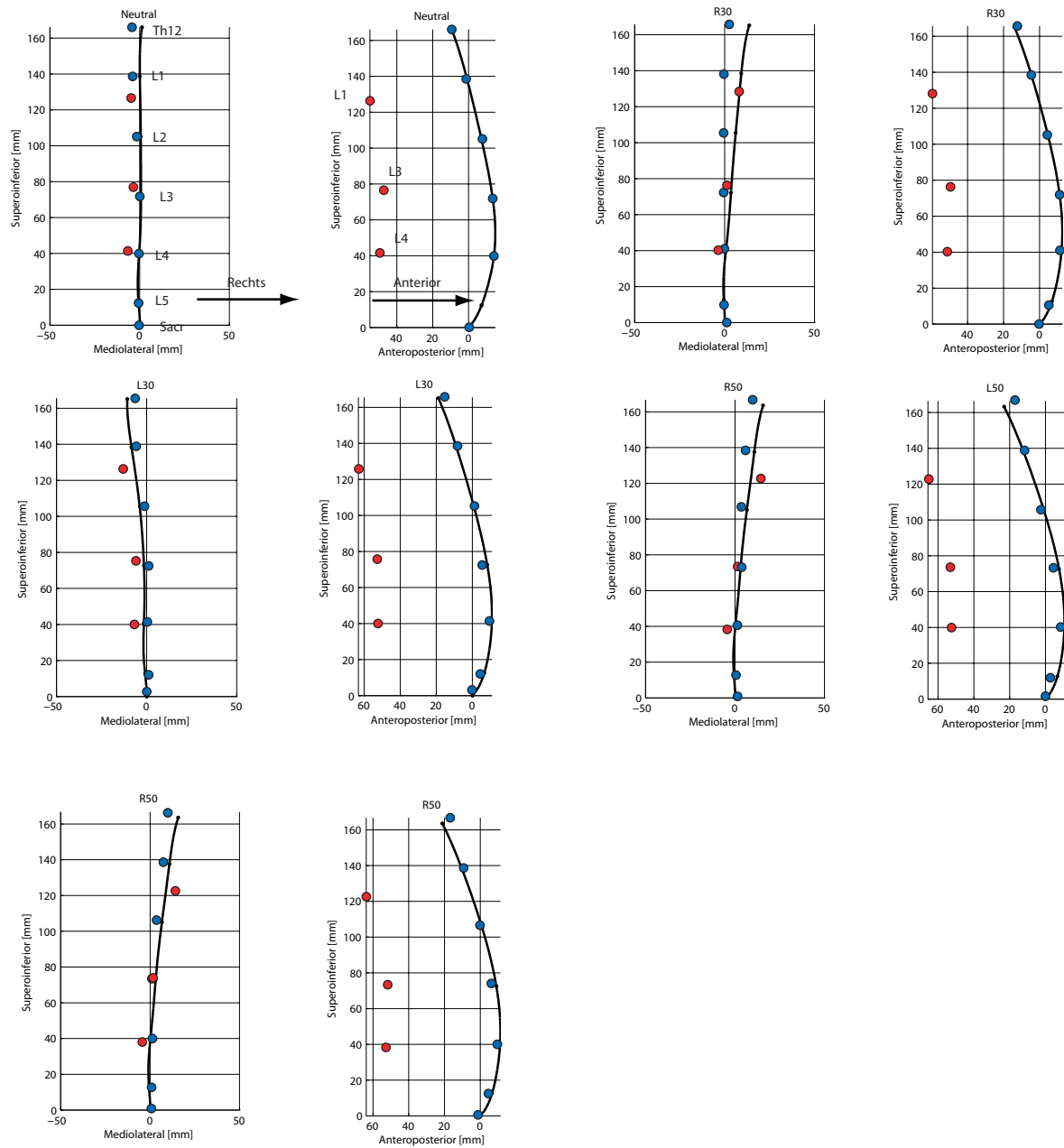


Abbildung 5.12: Abstand der WMZ (blau) zu den geschätzten i-PVL (schwarz). Rot: Hautmarker

Schätzung der lokalen Ebenen auf Wirbelkörperebene die Modellierung mit dem sakrumparallelen Darboux-Dreibein benutzt wurde. Eine genauere Identifikation der klinischen Ebenen war in diesem Spezialfall nicht nötig. Es muss klar herausgestellt werden, dass die Aussage dieser Ergebnisse nicht über reine Machbarkeit und Plausibilität hinausgehen, da zum Nachweis der Validität - auch in Spezialfällen - eine Studie mit einer klinisch relevanten Anzahl an Teilnehmern nötig ist. Zur Planung einer solchen Studie sind weitere Voruntersuchungen notwendig, die auf Basis der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse geplant werden können.

Für eine quantitative Aussage zum Anpassungsfehler wäre ein direkter Abgleich von Hautmarkerpositionen und der PVL, wie sie beispielsweise durch räumliche Fluoroskopie in Verbindung mit radiologisch ortbaren Hautmarkern möglich ist, hilfreich. Auch die Nutzung von sogenannten Funktions-MRT in Verbindung mit ortbaren Hautmarkern käme für die direkte Bestimmung von Hautmarkerpositionen und Lumbarkurve in Betracht. Dabei sollte auch die Schätzung der klinischen Ebenen durch das sakrumparallele Dreibein hinterfragt werden und durch quantitative Studien belegt werden. Die Unsicherheiten in der Zuordnung von gemessenen Hautmarkern zur radiologischen Untersuchung sind bei der in dieser Arbeit benutzten, indirekten Methode für eine quantitative Ausrichtung zu beträchtlich. Dies sollte das Ziel folgender Untersuchungen sei.

6 Ausblick

Die in dieser Arbeit angegebenen Ergebnisse weisen über die reine Machbarkeit des Verfahrens und Grenzen bei der Modellierung der gesamten Wirbelsäule nicht hinaus. Sie sind einzelne Fallstudien für zwei Personen. Daher sollte das Verfahren an Stichprobengrößen von klinischer Aussagekraft erprobt werden, um konkrete Aussagen über die Genauigkeit, auch im Vergleich zu anderen Methoden oder zu einem Goldstandard, treffen zu können. Zunächst könnten Versuche wie in Abschnitt 5 durchgeführt werden. Wegen der geringen Strahlendosis sollten dabei MRT-Aufnahmen an die Stelle der CT-Aufnahmen gesetzt werden.

Dabei wäre ein Vergleich der geschätzten Lumbarrotation, oder zumindest der Lage der Wirbelmauerzentren mit anderen Methoden zur Identifikation der Rotation im Lumbarebereich, möglich. Man könnte dabei verschiedene Steifigkeitsparameter testen, etwa zur Abgrenzung von unauffälligen Steifigkeiten gegen pathologische Steifigkeiten, oder unauffälliger Krümmung gegen pathologischen Krümmungen.

Zum Problem der Schätzung der Wirbelsäulenlinie in Form eines Mehrkörpermodells aus einer Spline-Kurve als Referenz gibt es eine Reihe von Arbeiten, siehe z.B. Moura u. a. (2009) und Moura u. a. (2011). Es wäre interessant, diese Verfahren mit dem symbolischen Wirbelsäulenmodell zu kombinieren und so über den Umweg der Bestimmung eines Kurvenmodells aus wenigen Hautmarkerpositionen zu einer Schätzung der Lage der Wirbelkörper zu kommen. Die im Abschnitt 5.2 beschriebenen Daten zur Oberkörper torsion würden sich zum direkten Vergleich mit radiologischen Aufnahmen eignen. Eine Kombination solcher Verfahren mit dem symbolischen Wirbelsäulenverfahren in einer Kosimulation könnte auch geprüft werden. Hierzu müsste jedoch mindestens eine gute numerische Performance der Anpassungsprozedur gegeben sein.

Literaturverzeichnis

- [Abouhossein u. a. 2011] ABOUHOSSEIN, Alireza ; WEISSE, Bernhard ; FERGUSON, Stephen J.: A multibody modelling approach to determine load sharing between passive elements of the lumbar spine. In: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 14 (2011), Nr. 06, S. 527–537
- [Abuzayed u. a. 2010] ABUZAYED, Bashar ; TUTUNCULER, Banu ; KUCUKYURUK, Baris ; TUZGEN, Saffet: Anatomic basis of anterior and posterior instrumentation of the spine: morphometric study. In: *Surgical and radiologic anatomy* 32 (2010), Nr. 1, S. 75–85
- [Alqarni u. a. 2011] ALQARNI, Abdullah M. ; SCHNEIDERS, Anthony G. ; HENDRICK, Paul A.: Clinical tests to diagnose lumbar segmental instability: a systematic review. In: *journal of orthopaedic & sports physical therapy* 41 (2011), Nr. 3, S. 130–140
- [Aquino 1970] AQUINO, CF: A dynamic model of the lumbar spine. In: *Journal of biomechanics* 3 (1970), Nr. 5, S. 473–486
- [Aspden 1989] ASPDEN, RM: The spine as an arch a new mathematical model. In: *Spine* 14 (1989), Nr. 3, S. 266–274
- [Aubin u. a. 1997] AUBIN, C ; DANSEREAU, Jean ; PARENT, F ; LABELLE, Hubert ; GUISE, Jacques A. de: Morphometric evaluations of personalised 3D reconstructions and geometric models of the human spine. In: *Medical and biological engineering and computing* 35 (1997), Nr. 6, S. 611–618
- [Bathe 2002] BATHE, Klaus-Jürgen: *Finite-elemente-methoden*. Springer DE, 2002
- [Belytschko u. a. 1974] BELYTSCHKO, T ; KULAK, RF ; SCHULTZ, AB ; GALANTE, JO: Finite element stress analysis of an intervertebral disc. In: *Journal of Biomechanics* 7 (1974), Nr. 3, S. 277–285
- [Berryman u. a. 2008] BERRYMAN, Fiona ; PYNSENT, Paul ; FAIRBANK, Jeremy ; DISNEY, Simon: A new system for measuring three-dimensional back shape in scoliosis. In: *European Spine Journal* 17 (2008), Nr. 5, S. 663–672
- [Berthonnaud und Dimnet 2007] BERTHONNAUD, E ; DIMNET, J: Analysis of structural features of deformed spines in frontal and sagittal projections. In: *Computerized Medical Imaging and Graphics* 31 (2007), Nr. 1, S. 9–16

-
- [Berthonnaud u. a. 2010] BERTHONNAUD, E ; FOUGIER, P ; HILMI, R ; LABELLE, H ; DIMNET, J: Relationship between sagittal spinal curves and back surface profiles obtained with radiographs. In: *Journal of Mechanics in Medicine and Biology* 10 (2010), Nr. 02, S. 313–325
- [Berthonnaud u. a. 2012] BERTHONNAUD, E ; HILMI, R ; DIMNET, J: Geometric structure of 3D spinal curves: plane regions and connecting zones. In: *ISRN Orthopedics* 2012 (2012)
- [Betsch u. a. 2013] BETSCH, Marcel ; WILD, Michael ; JOHNSTONE, Brian ; JUNG-BLUTH, Pascal ; HAKIMI, Mohssen ; KÜHLMANN, Britta ; RAPP, Walter: Evaluation of a novel spine and surface topography system for dynamic spinal curvature analysis during gait. In: *PloS one* 8 (2013), Nr. 7
- [Bishop 1975] BISHOP, Richard L.: There is More Than One Way to Frame a Curve. In: *American Mathematical Monthly* 82 (1975), März, Nr. 4, S. 246–251
- [Björck 1996] BJÖRCK, Åke: *Numerical methods for least squares problems*. Siam, 1996
- [Boisvert u. a. 2008] BOISVERT, Jonathan ; CHERIET, Farida ; PENNEC, Xavier ; LABELLE, Hubert ; AYACHE, Nicholas: Articulated spine models for 3-D reconstruction from partial radiographic data. In: *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* 55 (2008), Nr. 11, S. 2565–2574
- [de Boor 2001] BOOR, Carl de: *A Practical Guide to Splines*. revised edition. New York : Springer Verlag, 2001 (Applied Mathematical Sciences). – ISBN 0-387-95366-3
- [Breau u. a. 1991] BREAU, C ; SHIRAZI-ADL, A ; DE GUISE, J: Reconstruction of a human ligamentous lumbar spine using CT images - a three-dimensional finite element mesh generation. In: *Annals of biomedical engineering* 19 (1991), Nr. 3, S. 291–302
- [Breen u. a. 1989] BREEN, AC ; ALLEN, R ; MORRIS, A: Spine kinematics: a digital videofluoroscopic technique. In: *Journal of biomedical engineering* 11 (1989), Nr. 3, S. 224–228
- [Brekelmans u. a. 1972] BREKELMANS, WAM ; POORT, HW ; SLOOFF, TJJH: A new method to analyse the mechanical behaviour of skeletal parts. In: *Acta Orthopaedica* 43 (1972), Nr. 5, S. 301–317
- [Bryant u. a. 1989] BRYANT, J T. ; REID, J G. ; SMITH, Brenda L. ; STEVENSON, Joan M.: Method for determining vertebral body positions in the sagittal plane using skin markers. In: *Spine* 14 (1989), Nr. 3, S. 258–265

- [Cappozzo u. a. 2005] CAPPOZZO, Aurelio ; DELLA CROCE, Ugo ; LEARDINI, Alberto ; CHIARI, Lorenzo: Human movement analysis using stereophotogrammetry: Part 1: theoretical background. In: *Gait & posture* 21 (2005), Nr. 2, S. 186–196
- [do Carmo 1976] CARMO, Manfredo P. do: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice-Hall, 1976. – ISBN 0-13-212589-7
- [Celniker und Gossard 1991] CELNIKER, George ; GOSSARD, Dave: Deformable curve and surface finite elements for free-form shape design. In: *Proc. SIGGRAPH* Bd. 25, 1991, S. 257–266
- [Cerveri u. a. 2004a] CERVERI, P ; PEDOTTI, A ; FERRIGNO, G: Evolutionary optimization for robust hierarchical computation of the rotation centres of kinematic chains from reduced ranges of motion the lower spine case. In: *Journal of biomechanics* 37 (2004), Nr. 12, S. 1881–1890
- [Cerveri u. a. 2004b] CERVERI, P ; PEDOTTI, A ; FERRIGNO, Giancarlo: Non-invasive approach towards the in vivo estimation of 3D inter-vertebral movements: methods and preliminary results. In: *Medical engineering & physics* 26 (2004), Nr. 10, S. 841–853
- [Chen u. a. 2001] CHEN, Chen-Sheng ; CHENG, Cheng-Kung ; LIU, Chien-Lin ; LO, Wai-Hee: Stress analysis of the disc adjacent to interbody fusion in lumbar spine. In: *Medical engineering & physics* 23 (2001), Nr. 7, S. 485–493
- [Chen u. a. 2012] CHEN, Shih-Hao ; LIN, Shang-Chih ; TSAI, Wen-Chi ; WANG, Chih-Wei ; CHAO, Shih-Heng: Biomechanical comparison of unilateral and bilateral pedicle screws fixation for transforaminal lumbar interbody fusion after decompressive surgery—a finite element analysis. In: *BMC musculoskeletal disorders* 13 (2012), Nr. 1, S. 72
- [Chiari u. a. 2005] CHIARI, Lorenzo ; DELLA CROCE, Ugo ; LEARDINI, Alberto ; CAPPOZZO, Aurelio: Human movement analysis using stereophotogrammetry: Part 2: Instrumental errors. In: *Gait & posture* 21 (2005), Nr. 2, S. 197–211
- [Chockalingam u. a. 2002] CHOCKALINGAM, Nachiappan ; DANGERFIELD, Peter H. ; GIAKAS, Giannis ; COCHRANE, Tom ; DORGAN, John C.: Computer-assisted Cobb measurement of scoliosis. In: *European Spine Journal* 11 (2002), Nr. 4, S. 353–357
- [Cholewicki u. a. 1991] CHOLEWICKI, J ; MCGILL, SM ; WELLS, RP ; VERNON, H: Method for measuring vertebral kinematics from videofluoroscopy. In: *Clinical Biomechanics* 6 (1991), Nr. 2, S. 73–78

-
- [Christophy u. a. 2012] CHRISTOPHY, Miguel ; SENAN, Nur Adila F. ; LOTZ, Jeffrey C. ; O'REILLY, Oliver M.: A musculoskeletal model for the lumbar spine. In: *Biomechanics and modeling in mechanobiology* 11 (2012), Nr. 1-2, S. 19–34
- [Cobb 1948] COBB, John R.: *Outline for the study of scoliosis*. Instructional Course Lectures. Ann Arbor: JW Edwards: The American Academy of Orthopaedic Surgeons (Veranst.), 1948
- [Crosbie u. a. 1997] CROSBIE, Jack ; VACHALATHITI, Roongtiwa ; SMITH, Richard: Patterns of spinal motion during walking. In: *Gait & Posture* 5 (1997), Nr. 1, S. 6–12
- [Daffner u. a. 1987] DAFFNER, RH ; DEEB, ZL ; ROTHFUS, WE: The posterior vertebral body line: importance in the detection of burst fractures. In: *American Journal of Roentgenology* 148 (1987), Nr. 1, S. 93–96
- [Danells u. a. 2004] DANELLS, Cynthia J. ; BLACK, Sandra E. ; GLADSTONE, David J. ; MCILROY, William E.: Poststroke "Pushing" Natural History and Relationship to Motor and Functional Recovery. In: *Stroke* 35 (2004), Nr. 12, S. 2873–2878
- [Darboux 1894] DARBOUX, Gaston: *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et les applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*. American Mathematical Society (AMS), 1894. – ISBN 0-821-82837-1
- [Davis III u. a. 1991] DAVIS III, Roy B. ; OUNPUU, Sylvia ; TYBURSKI, Dennis ; GAGE, James R.: A gait analysis data collection and reduction technique. In: *Human Movement Science* 10 (1991), Nr. 5, S. 575–587
- [De Zee u. a. 2007] DE ZEE, Mark ; HANSEN, Lone ; WONG, Christian ; RASMUSSEN, John ; SIMONSEN, Erik B.: A generic detailed rigid-body lumbar spine model. In: *Journal of biomechanics* 40 (2007), Nr. 6, S. 1219–1227
- [Denis 1983] DENIS, Francis: The three column spine and its significance in the classification of acute thoracolumbar spinal injuries. In: *spine* 8 (1983), Nr. 8, S. 817–831
- [Dierckx 1993] DIERCKX, Paul: *Curve and Surface Fitting with Splines*. Oxford : Clarendon Press, 1993
- [Don u. a. 2012] DON, R ; CAPODAGLIO, P ; CIMOLIN, V ; BENEDETTI, MG ; D'OSUALDO, F ; FRIGO, C ; VISMARA, L ; NEGRINI, S: Instrumental measures of spinal function: is it worth? A state-of-the art from a clinical perspective. In: *European Journal of Physical and Rehabilitation Medicine* 48 (2012), Nr. 2, S. 255–273

- [Dooris u. a. 2001] DOORIS, Andrew P. ; GOEL, Vijay K. ; GROSLAND, Nicole M. ; GILBERTSON, Lars G. ; WILDER, David G.: Load-sharing between anterior and posterior elements in a lumbar motion segment implanted with an artificial disc. In: *Spine* 26 (2001), Nr. 6, S. E122–E129
- [Dopf u. a. 1994] DOPF, Craig A. ; MANDEL, Shlomo S. ; GEIGER, Douglas F. ; MAYER, Philip J.: Analysis of Spine Motion Variability Using a Computerized Goniometer Compared to Physical Examination A Prospective Clinical Study. In: *Spine* 19 (1994), Nr. 5, S. 586–595
- [Drerup und Hierholzer 1994] DRERUP, B ; HIERHOLZER, E: Back shape measurement using video rasterstereography and three-dimensional reconstruction of spinal shape. In: *Clinical Biomechanics* 9 (1994), Nr. 1, S. 28–36
- [Drerup und Hierholzer 1996] DRERUP, B ; HIERHOLZER, E: Assessment of scoliotic deformity from back shape asymmetry using an improved mathematical model. In: *Clinical Biomechanics* 11 (1996), Nr. 7, S. 376–383
- [Drerup u. a. 1997] DRERUP, B ; HIERHOLZER, E ; ELLGER, B u. a.: Shape analysis of the lateral and frontal projection of spine curves assessed from rasterstereographs. In: *Studies in Health Technology and Informatics* (1997), S. 271–276
- [Drerup und Hierholzer 1986] DRERUP, Burkhard ; HIERHOLZER, Eberhard: Measurement and shape analysis including vertebral rotation of scoliotic spines from single plane radiographs. In: *1985 International Technical Symposium/Europe* International Society for Optics and Photonics (Veranst.), 1986, S. 124–129
- [Dutton u. a. 1989] DUTTON, KE ; JONES, TJ ; SLINGER, BS ; SCULL, ER ; O’CONNOR, J: Reliability of the Cobb angle index derived by traditional and computer assisted methods. In: *Australasian physical & engineering sciences in medicine/supported by the Australasian College of Physical Scientists in Medicine and the Australasian Association of Physical Sciences in Medicine* 12 (1989), Nr. 1, S. 16–23
- [Dvorak u. a. 1993] DVORAK, J ; PANJABI, MM ; GROB, D ; NOVOTNY, JE ; ANTINNES, JA: Clinical validation of functional flexion/extension radiographs of the cervical spine. In: *Spine* 18 (1993), Nr. 1, S. 120–127
- [Eberlein u. a. 2004] EBERLEIN, Robert ; HOLZAPFEL, Gerhard A. ; FRÖHLICH, Markus: Multi-segment FEA of the human lumbar spine including the heterogeneity of the annulus fibrosus. In: *Computational Mechanics* 34 (2004), Nr. 2, S. 147–163

- [Fagan u. a. 2002] FAGAN, MJ ; JULIAN, S ; MOHSEN, AM: Finite element analysis in spine research. In: *Proceedings of the institution of mechanical engineers, part h: journal of engineering in medicine* 216 (2002), Nr. 5, S. 281–298
- [Ferguson 1930] FERGUSON, A B.: The study and treatment of scoliosis. In: *South Med J* (1930), Nr. 23, S. 116–120
- [Frigo u. a. 2003] FRIGO, C ; CARABALONA, R ; DALLA MURA, M ; NEGRINI, S: The upper body segmental movements during walking by young females. In: *Clinical biomechanics* 18 (2003), Nr. 5, S. 419–425
- [Frobin und Hierholzer 1983] FROBIN, W ; HIERHOLZER, E: Rasterstereography: a photogrammetric method for measurement of body surfaces. In: *Journal of biological photography* 51 (1983), Nr. 1, S. 11
- [García Vacas u. a. 2014] GARCÍA VACAS, Francisco ; EZQUERRO JUANCO, Francisco ; BLANCA, Ana Pérez de la ; PRADO NOVOA, María ; POSTIGO POZO, Sergio: The flexion–extension response of a novel lumbar intervertebral disc prosthesis: A finite element study. In: *Mechanism and Machine Theory* 73 (2014), S. 273–281
- [Gardner-Morse und Stokes 2003] GARDNER-MORSE, Mack G. ; STOKES, Ian A.: Physiological axial compressive preloads increase motion segment stiffness, linearity and hysteresis in all six degrees of freedom for small displacements about the neutral posture. In: *Journal of orthopaedic research* 21 (2003), Nr. 3, S. 547–552
- [Gill u. a. 1998] GILL, Philip E. ; MURRAY, Walter ; SAUNDERS, Michael A. ; WRIGHT, Margaret H.: User's Guide for NPSOL 5.0: A Fortran Package for Nonlinear Programming / SOL 86-1. 1998. – Forschungsbericht
- [Gill u. a. 1981] GILL, Philip E. ; MURRAY, Walter ; WRIGHT, Margaret H.: Practical optimization. (1981)
- [Gill u. a. 2012] GILL, Sean ; ABOLMAESUMI, Purang ; FICHTINGER, Gabor ; BOISVERT, Jonathan ; PICHORA, David ; BORSHNECK, Dan ; MOUSAVI, Parvin: Biomechanically constrained groupwise ultrasound to CT registration of the lumbar spine. In: *Medical Image Analysis* 16 (2012), Nr. 3, S. 662–674
- [Goel u. a. 1988] GOEL, Vijay K. ; KIM, YOUNG E. ; LIM, TH ; WEINSTEIN, JAMES N.: An analytical investigation of the mechanics of spinal instrumentation. In: *Spine* 13 (1988), Nr. 9, S. 1003–1011

- [Goel u. a. 1995] GOEL, VK ; MONROE, BT ; GILBERTSON, LG ; BRINCKMANN, P: Interlaminar shear stresses and laminae separation in a disc: finite element analysis of the L3-L4 motion segment subjected to axial compressive loads. In: *Spine* 20 (1995), Nr. 6, S. 689–698
- [Goodvin u. a. 2006] GOODVIN, Christina ; PARK, Edward J. ; HUANG, Kevin ; SAKAKI, Kelly: Development of a real-time three-dimensional spinal motion measurement system for clinical practice. In: *Medical and Biological Engineering and Computing* 44 (2006), Nr. 12, S. 1061–1075
- [Greaves u. a. 2008] GREAVES, Carolyn Y. ; GADALA, Mohamed S. ; OXLAND, Thomas R.: A three-dimensional finite element model of the cervical spine with spinal cord: an investigation of three injury mechanisms. In: *Annals of biomedical engineering* 36 (2008), Nr. 3, S. 396–405
- [Gregersen und Lucas 1967] GREGERSEN, Gary G. ; LUCAS, Donald B.: An in vivo study of the axial rotation of the human thoracolumbar spine. In: *The Journal of Bone & Joint Surgery* 49 (1967), Nr. 2, S. 247–262
- [Grob u. a. 2007] GROB, D ; FRAUENFELDER, H ; MANNION, AF: The association between cervical spine curvature and neck pain. In: *European Spine Journal* 16 (2007), Nr. 5, S. 669–678
- [Han u. a. 2012] HAN, Kap-Soo ; ZANDER, Thomas ; TAYLOR, William R. ; ROHLMANN, Antonius: An enhanced and validated generic thoraco-lumbar spine model for prediction of muscle forces. In: *Medical engineering & physics* 34 (2012), Nr. 6, S. 709–716
- [Hansen u. a. 2006] HANSEN, Lone ; DE ZEE, Mark ; RASMUSSEN, John ; ANDERSEN, Thomas B. ; WONG, Christian ; SIMONSEN, Erik B.: Anatomy and biomechanics of the back muscles in the lumbar spine with reference to biomechanical modeling. In: *Spine* 31 (2006), Nr. 17, S. 1888–1899
- [Harrison u. a. 1998] HARRISON, Donald D. ; CAILLIET, Rene ; JANIK, Tadeusz J. ; TROYANOVICH, Stephan J. ; HARRISON, Deed E. ; HOLLAND, CBurt: Elliptical modeling of the sagittal lumbar lordosis and segmental rotation angles as a method to discriminate between normal and low back pain subjects. In: *Journal of Spinal Disorders & Techniques* 11 (1998), Nr. 5, S. 430–439
- [Harrison u. a. 2004] HARRISON, Donald D. ; HARRISON, Deed E. ; JANIK, Tadeusz J. ; CAILLIET, Rene ; FERRANTELLI, Joseph R. ; HAAS, Jason W. ; HOLLAND, Burt: Modeling of the sagittal cervical spine as a method to discriminate hypolordosis: results of

- elliptical and circular modeling in 72 asymptomatic subjects, 52 acute neck pain subjects, and 70 chronic neck pain subjects. In: *Spine* 29 (2004), Nr. 22, S. 2485–2492
- [Hashemirad u. a. 2012] HASHEMIRAD, Fahimeh ; HATEF, Boshra ; JABERZADEH, Shapour ; ALE AGHA, Nasrin: Validity and reliability of skin markers for measurement of intersegmental mobility at L2–3 and L3–4 during lateral bending in healthy individuals: A fluoroscopy study. In: *Journal of bodywork and movement therapies* (2012)
- [Hay u. a. 2009] HAY, Ori ; HERSHKOVITZ, Israel ; RIVLIN, Ehud: Spine curve modeling for quantitative analysis of spinal curvature. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 2009. EMBC 2009. Annual International Conference of the IEEE IEEE* (Veranst.), 2009, S. 6356–6359
- [Hefter u. a. 2009] HEFTER, Harald ; HIRSCH, Mark A. ; WESTHOFF, Bettina ; KRAUSPE, Ruediger ; ROSENTHAL, Dietmar ; KECSKEMÉTHY, Andres: Gait Improvement After BTX-A Injections Into the Arm In Patients With Hemispasticity After Stroke. In: *Proceedings of the DGfB Congress 2009, in Münster, 2009*
- [Hess und Lombard 1958] HESS, JL ; LOMBARD, Ch F.: Theoretical investigations of dynamic response of man to high vertical accelerations. In: *The Journal of aviation medicine* 29 (1958), Nr. 1, S. 66
- [Hierholzer und Hackenberg 2002] HIERHOLZER, Eberhard ; HACKENBERG, Lars: Three-dimensional shape analysis of the scoliotic spine using MR tomography and rasterstereography. In: *Studies in health technology and informatics* 91 (2002), S. 184
- [Hoschek und Lasser 1993] HOSCHEK, Josef ; LASSER, Dieter: *Fundamentals of computer aided geometric design*. first. Wellesley : A K Peters, 1993. – ISBN 1-56881-007-5
- [Juchem u. a. 2007] JUCHEM, Sabine ; PFAFFMANN, Lucas ; ECKHARDT, Franziska ; THOMSEN, Dirk ; LEHNER, Stefan ; BUZUG, Thorsten M. ; GRUBER, Karin: MBS-Modeling for Estimation of Stress and Strain in Human Body. In: *Advances in Medical Engineering*. Springer, 2007, S. 319–322
- [Kecskeméthy 1993] KECSKEMÉTHY, A.: *Objektorientierte Modellierung der Dynamik von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1993 (Fortschrittberichte VDI, Reihe 20 Nr. 88)
- [Keessen u. a. 1994] KEESSEN, W u. a.: Variation in Cobb angle measurements in scoliosis. In: *Skeletal radiology* 23 (1994), Nr. 7, S. 517–520

- [Kingma u. a. 1996] KINGMA, Idsart ; LOOZE, Michiel P. de ; TOUSSAINT, Huub M. ; KLIJNSMA, Hans G. ; BRUIJNEN, Tom: Validation of a full body 3-D dynamic linked segment model. In: *Human Movement Science* 15 (1996), Nr. 6, S. 833–860
- [Kleinberger 1993] KLEINBERGER, Michael: Application of finite element techniques to the study of cervical spine mechanics. In: *Stapp Car Crash Conference, 37th, 1993, San Antonio, Texas, USA*, 1993
- [Konz u. a. 2006] KONZ, Regina J. ; FATONE, Stefania ; STINE, Rebecca L. ; GANJU, Aruna ; GARD, Steven A. ; ONDRA, Stephen L.: A kinematic model to assess spinal motion during walking. In: *Spine* 31 (2006), Nr. 24, S. E898–E906
- [Kovalenko u. a. 2011] KOVALENKO, Oleksiy ; KALININ, Mykhaylo ; POLYAKOV, Alexander ; BRYEKHOV, Alexander: Modeling stress–strain state of screw transpedicular spine fixation system with variable structure of the vertebral body. In: *Journal of Biomechanics* 44 (2011), S. 21
- [Kumaresan u. a. 1999] KUMARESAN, Srirangam ; YOGANANDAN, Narayan ; PINTAR, Frank A.: Finite element analysis of the cervical spine: a material property sensitivity study. In: *Clinical Biomechanics* 14 (1999), Nr. 1, S. 41–53
- [Labesse u. a. 1996] LABESSE, F ; CHEZE, L ; DIMNET, J: Determination of optimal marker locations for further identification of the moving spine model. In: *Proceedings of the 4th international symposium on 3D analysis of human movement*, 1996
- [Lafon u. a. 2010] LAFON, Y ; SMITH, FW ; BEILLAS, P: Combination of a model-deformation method and a positional MRI to quantify the effects of posture on the anatomical structures of the trunk. In: *Journal of biomechanics* 43 (2010), Nr. 7, S. 1269–1278
- [Lam u. a. 2009] LAM, Shing Chun B. ; MCCANE, Brendan ; ALLEN, Robert: Automated tracking in digitized videofluoroscopy sequences for spine kinematic analysis. In: *Image and Vision Computing* 27 (2009), Nr. 10, S. 1555–1571
- [Leardini u. a. 2009] LEARDINI, Alberto ; BIAGI, Fabio ; BELVEDERE, Claudio ; BENEDETTI, Maria G.: Quantitative comparison of current models for trunk motion in human movement analysis. In: *Clinical Biomechanics* 24 (2009), Nr. 7, S. 542–550
- [Leardini u. a. 1999] LEARDINI, Alberto ; CAPPOZZO, Aurelio ; CATANI, Fabio ; TOKSVIG-LARSEN, Soren ; PETITTO, Aldo ; SFORZA, Vincenzo ; CASSANELLI, Giancarlo ; GIANNINI, Sandro: Validation of a functional method for the estimation of hip joint centre location. In: *Journal of biomechanics* 32 (1999), Nr. 1, S. 99–103

- [Leardini u. a. 2005] LEARDINI, Alberto ; CHIARI, Lorenzo ; CROCE, Ugo D. ; CAPPOZZO, Aurelio: Human movement analysis using stereophotogrammetry: Part 3. Soft tissue artifact assessment and compensation. In: *Gait & posture* 21 (2005), Nr. 2, S. 212–225
- [Lee u. a. 2009] LEE, Linda-Joy ; COPPIETERS, Michel W. ; HODGES, Paul W.: Anticipatory postural adjustments to arm movement reveal complex control of paraspinal muscles in the thorax. In: *Journal of Electromyography and Kinesiology* 19 (2009), Nr. 1, S. 46–54
- [Liebschner u. a. 2003] LIEBSCHNER, Michael A. ; KOPPERDAHL, David L. ; ROSENBERG, William S. ; KEAVENY, Tony M.: Finite element modeling of the human thoracolumbar spine. In: *Spine* 28 (2003), Nr. 6, S. 559–565
- [Lien u. a. 2007] LIEN, Shiu-Bii ; LIOU, Nien-Hsien ; WU, Shing-Sheng: Analysis of anatomic morphometry of the pedicles and the safe zone for through-pedicle procedures in the thoracic and lumbar spine. In: *European Spine Journal* 16 (2007), Nr. 8, S. 1215–1222
- [Lotz u. a. 2012] LOTZ, Jeffrey C. ; O'REILLY, Oliver M. ; PETERS, Daniel M.: Some comments on the absence of buckling of the ligamentous human spine in the sagittal plane. In: *Mechanics Research Communications* 40 (2012), S. 11–15
- [Louis und Goldstein 1983] LOUIS, René ; GOLDSTEIN, Elliot: *Surgery of the spine: surgical anatomy and operative approaches*. Springer Heidelberg, 1983
- [Lu u. a. 1996] LU, Y M. ; HUTTON, William C. ; GHARPURAY, Vasanti M.: Do bending, twisting, and diurnal fluid changes in the disc affect the propensity to prolapse? A viscoelastic finite element model. In: *Spine* 21 (1996), Nr. 22, S. 2570–2579
- [Ma u. a. 2008] MA, Heather T. ; YANG, Zhengyi ; GRIFFITH, James F. ; LEUNG, Ping C. ; LEE, Raymond Y.: A new method for determining lumbar spine motion using Bayesian belief network. In: *Medical & biological engineering & computing* 46 (2008), Nr. 4, S. 333–340
- [Maleike u. a. 2009] MALEIKE, Daniel ; NOLDEN, Marco ; MEINZER, H-P ; WOLF, Ivo: Interactive segmentation framework of the medical imaging interaction toolkit. In: *Computer methods and programs in biomedicine* 96 (2009), Nr. 1, S. 72–83
- [Mauch u. a. 2010] MAUCH, Frieder ; JUNG, Christian ; HUTH, Jochen ; BAUER, Gerhard: Changes in the lumbar spine of athletes from supine to the true-standing position in magnetic resonance imaging. In: *Spine* 35 (2010), Nr. 9, S. 1002–1007

- [Moga 2010] MOGA, Paul J.: Skin distraction at select landmarks on the spine midline in the upright and fully flexed postures. In: *Journal of bodywork and movement therapies* 14 (2010), Nr. 1, S. 13–18
- [Morais u. a. 2012] MORAIS, Sara T. ; FLORES, Paulo ; CLARO, JC: Development of a biomechanical spine model for dynamic analysis. In: *Bioengineering (ENBENG), 2012 IEEE 2nd Portuguese Meeting in IEEE* (Veranst.), 2012, S. 1–6
- [Morgenroth u. a. 2010] MORGENROTH, David C. ; ORENDURFF, Michael S. ; SHAKIR, Ali ; SEGAL, Ava ; SHOFR, Jane ; CZERNIECKI, Joseph M.: The relationship between lumbar spine kinematics during gait and low-back pain in transfemoral amputees. In: *American Journal of Physical Medicine & Rehabilitation* 89 (2010), Nr. 8, S. 635–643
- [Mörl und Blickhan 2006] MÖRL, Falk ; BLICKHAN, Reinhard: Three-dimensional relation of skin markers to lumbar vertebrae of healthy subjects in different postures measured by open MRI. In: *European Spine Journal* 15 (2006), Nr. 6, S. 742–751
- [Mörl u. a. 2005] MÖRL, Falk ; WAGNER, Heiko ; BLICKHAN, Reinhard: Lumbar spine intersegmental motion analysis during lifting. In: *Pathophysiology* 12 (2005), Nr. 4, S. 295–302
- [Moura u. a. 2011] MOURA, Daniel C. ; BOISVERT, Jonathan ; BARBOSA, Jorge G. ; LABELLE, Hubert ; TAVARES, João: Fast 3D reconstruction of the spine from biplanar radiographs using a deformable articulated model. In: *Medical engineering & physics* 33 (2011), Nr. 8, S. 924–933
- [Moura u. a. 2009] MOURA, Daniel C. ; BOISVERT, Jonathan ; BARBOSA, Jorge G. ; TAVARES, João: Fast 3d reconstruction of the spine using user-defined splines and a statistical articulated model. In: *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)* (2009)
- [NAG 2005] NAG, Numerical Algorithms G.: *User manual for nag_opt_nlin_lsq (e04unc)*, Mark 8. Oxford: Numerical Algorithms Group (Veranst.), 2005
- [Needham u. a. 2012] NEEDHAM, R ; CHOCKALINGAM, N ; NAEMI, R ; SHANNON, T ; HEALY, A: Validation of a multi-segment spinal model for kinematic analysis and a comparison of different data processing techniques. In: *Studies in health technology and informatics* 176 (2012), S. 151
- [Nocedal und Wright 1999] NOCEDAL, Jorge ; WRIGHT, Stephen J.: *Numerical Optimization*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 1999 (Springer series in operations research). – ISBN 0-387-98793-2

- [Nürnberg 1989] NÜRNBERGER, Günther: *Approximation by Spline Functions*. first. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 1989. – ISBN 3-540-51618-2
- [Ochia u. a. 2006] OCHIA, Ruth S. ; INOUE, Nozomu ; RENNER, Susan M. ; LORENZ, Eric P. ; LIM, Tae-Hong ; ANDERSSON, Gunnar B. ; AN, Howard S.: Three-dimensional in vivo measurement of lumbar spine segmental motion. In: *Spine* 31 (2006), Nr. 18, S. 2073–2078
- [O'Reilly und Peters 2011] O'REILLY, Oliver M. ; PETERS, Daniel M.: On stability analyses of three classical buckling problems for the elastic strut. In: *Journal of Elasticity* 105 (2011), Nr. 1-2, S. 117–136
- [Panjabi und White III 1971] PANJABI, Manohar ; WHITE III, Augustus A.: A mathematical approach for three-dimensional analysis of the mechanics of the spine. In: *Journal of biomechanics* 4 (1971), Nr. 3, S. 203–211
- [Panjabi 1973] PANJABI, Manohar M.: Three-dimensional mathematical model of the human spine structure. In: *Journal of Biomechanics* 6 (1973), Nr. 6, S. 671–680
- [Panjabi u. a. 1976] PANJABI, Manohar M. ; BRAND, Richard A. ; WHITE, Augustus A.: Three-dimensional flexibility and stiffness properties of the human thoracic spine. In: *Journal of Biomechanics* 9 (1976), Nr. 4, S. 185–192
- [Panjabi u. a. 1981] PANJABI, Manohar M. ; KRAG, Martin H. ; GOEL, Vijay K.: A technique for measurement and description of three-dimensional six degree-of-freedom motion of a body joint with an application to the human spine. In: *Journal of biomechanics* 14 (1981), Nr. 7, S. 447–460
- [Percy und Bogduk 1988] PERCY, Mark J. ; BOGDUK, Nikolai: Instantaneous axes of rotation of the lumbar intervertebral joints. In: *Spine* 13 (1988), Nr. 9, S. 1033–1041
- [Percy u. a. 1987] PERCY, MJ ; GILL, JM ; HINDLE, RJ ; JOHNSON, GR: Measurement of human back movements in three dimensions by opto-electronic devices. In: *Clinical Biomechanics* 2 (1987), Nr. 4, S. 199–204
- [Percy und Tibrewal 1984] PERCY, MJ ; TIBREWAL, SB: Axial rotation and lateral bending in the normal lumbar spine measured by three-dimensional radiography. In: *Spine* 9 (1984), Nr. 6, S. 582–587
- [Piegl und Tiller 1997] PIEGL, Les ; TILLER, Wayne: *The NURBS Book*. second. Berlin; Heidelberg : Springer, 1997. – ISBN 3-540-61545-8

- [Pitkänen und Manninen 1994] PITKÄNEN, M ; MANNINEN, HI: Sidebending versus flexion-extension radiographs in lumbar spinal instability. In: *Clinical radiology* 49 (1994), Nr. 2, S. 109–114
- [Pitkänen u. a. 2002] PITKÄNEN, MT ; MANNINEN, HI ; LINDGREN, K-AJ ; SIHVONEN, TA ; AIRAKSINEN, O ; SOIMAKALLIO, S: Segmental lumbar spine instability at flexion–extension radiography can be predicted by conventional radiography. In: *Clinical radiology* 57 (2002), Nr. 7, S. 632–639
- [Polikeit u. a. 2003] POLIKEIT, Anne ; NOLTE, Lutz P. ; FERGUSON, Stephen J.: The effect of cement augmentation on the load transfer in an osteoporotic functional spinal unit: finite-element analysis. In: *Spine* 28 (2003), Nr. 10, S. 991–996
- [Powell 1982] POWELL, Michael J. D.: Variable Metric Methods for Constrained Optimization. In: BACHEM, A. (Hrsg.) ; GRÖTSCHEL, M. (Hrsg.) ; KORTE, B. (Hrsg.): *Mathematical Programming: The State of the Art*, 1982, S. 288–311
- [Powell 1970] POWELL, Michael J.: A hybrid method for nonlinear equations. In: *Numerical methods for nonlinear algebraic equations* 7 (1970), S. 87–114
- [Preuss und Popovic 2010] PREUSS, Richard A. ; POPOVIC, Milos R.: Three-dimensional spine kinematics during multidirectional, target-directed trunk movement in sitting. In: *Journal of Electromyography and Kinesiology* 20 (2010), Nr. 5, S. 823–832
- [Putto und Tallroth 1990] PUTTO, E ; TALLROTH, K: Extension-Flexion Radiographs for Motion Studies of the Lumbar Spine: A Comparison of Two Methods. In: *Spine* 15 (1990), Nr. 2, S. 107–110
- [Putz 1981] PUTZ, Reinhard: *Funktionelle Anatomie der Wirbelgelenke*, Dissertation, 1981
- [Putz und Pabst 2000] PUTZ, Reinhard ; PABST, Reinhard: Sobotta Atlas der Anatomie des Menschen Band 2 Rumpf, Eingeweide, untere Extremität 21. In: *Auflage Urban und Fischer Verlag (München-Jena)* (2000)
- [Qin und Terzopoulos 1996] QIN, Hong ; TERZOPOULOS, Demetri: D-NURBS: A physics-based framework for geometric design. In: *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on* 2 (1996), Nr. 1, S. 85–96
- [Ranavolo u. a. 2012] RANAVOLO, Alberto ; DON, Romildo ; DRAICCHIO, Francesco ; BARTOLO, Michelangelo ; SERRAO, Mariano ; PADUA, Luca ; CIPOLLA, Gianfranco ; PIERELLI, Francesco ; IAVICOLI, Sergio ; SANDRINI, Giorgio: Modelling the spine as a

- deformable body: Feasibility of reconstruction using an optoelectronic system. In: *Applied Ergonomics* (2012)
- [Rohlmann u. a. 2005] ROHLMANN, Antonius ; ZANDER, Thomas ; BERGMANN, Georg: Effect of total disc replacement with ProDisc on intersegmental rotation of the lumbar spine. In: *Spine* 30 (2005), Nr. 7, S. 738–743
- [Roozmon u. a. 1993] ROOZMON, P ; GRACOVETSKY, SA ; GOUW, GJ ; NEWMAN, N: Examining motion in the cervical spine II: Characterization of coupled joint motion using an opto-electronic device to track skin markers. In: *Journal of biomedical engineering* 15 (1993), Nr. 1, S. 13–22
- [Rosenthal u. a. 2012] ROSENTHAL, Dietmar ; ESPINOZA-ORIAS, Alejandro ; HEFTER, Harald ; ANDERSSON, Gunnar ; WIMMER, Markus: Marker based in-vivo analysis of 3D spinal motion using spline curves. In: *Proceedings of The Second Joint International Conference on Multibody System Dynamics - IMSD 2012*, 2012
- [Rosenthal und Kecskeméthy 2009] ROSENTHAL, Dietmar ; KECSKEMÉTHY, Andrés: Visualization of the motion of the human spine in the context of gait analysis through splines. In: *PAMM* 9 (2009), Nr. 1, S. 177–178
- [Schmidt u. a. 2007] SCHMIDT, Hendrik ; KETTLER, Annette ; ROHLMANN, Antonius ; CLAES, Lutz ; WILKE, Hans-Joachim: The risk of disc prolapses with complex loading in different degrees of disc degeneration—a finite element analysis. In: *Clinical Biomechanics* 22 (2007), Nr. 9, S. 988–998
- [Schultz und Galante 1970] SCHULTZ, Albert B. ; GALANTE, Jorge O.: A mathematical model for the study of the mechanics of the human vertebral column. In: *Journal of biomechanics* 3 (1970), Nr. 4, S. 405–416
- [Schweikert 1965] SCHWEIKERT, Daniel G.: An interpolation curve using a spline in tension / DTIC Document. 1965. – Forschungsbericht
- [Seth u. a. 2011] SETH, Ajay ; SHERMAN, Michael ; REINBOLT, Jeffrey A. ; DELP, Scott L.: OpenSim: a musculoskeletal modeling and simulation framework for< i> in silico</i> investigations and exchange. In: *Procedia IUTAM* 2 (2011), S. 212–232
- [Shea u. a. 1998] SHEA, Kevin G. ; STEVENS, Peter M. ; NELSON, Mark ; SMITH, John T. ; MASTERS, Kevin S. ; YANDOW, Suzanne: A Comparison of Manual Versus Computer-Assisted Radiographic Measurement: Intraobserver Measurement Variability for Cobb Angles. In: *Spine* 23 (1998), Nr. 5, S. 551–555

- [Shirazi-Adl 2006] SHIRAZI-ADL, A: Analysis of large compression loads on lumbar spine in flexion and in torsion using a novel wrapping element. In: *Journal of biomechanics* 39 (2006), Nr. 2, S. 267–275
- [Shirazi-Adl u. a. 1986] SHIRAZI-ADL, A ; AHMED, ABDUL M. ; SHRIVASTAVA, SURESH C.: Mechanical response of a lumbar motion segment in axial torque alone and combined with compression. In: *Spine* 11 (1986), Nr. 9, S. 914–927
- [Shirazi-Adl und Parnianpour 2000] SHIRAZI-ADL, A ; PARNIANPOUR, M: Load-bearing and stress analysis of the human spine under a novel wrapping compression loading. In: *Clinical Biomechanics* 15 (2000), Nr. 10, S. 718–725
- [Shirazi-Adl u. a. 1984] SHIRAZI-ADL, Seyed A. ; SHRIVASTAVE, Suresh C. ; AHMED, Abdul M.: Stress Analysis of the Lumbar Disc-Body Unit in Compression A Three-Dimensional Nonlinear Finite Element Study. In: *Spine* 9 (1984), Nr. 2, S. 120–134
- [Simonidis u. a. 2007] SIMONIDIS, Christian ; SCHARMACHER, Manuel ; SEEMANN, Wolfgang: Reduced kinematic model of the human spine. In: *PAMM* 7 (2007), Nr. 1, S. 4020025–4020026
- [Simonidis und Seemann 2009] SIMONIDIS, Christian ; SEEMANN, Wolfgang: Improving marker based inverse kinematics solutions for under-determined spinal models. In: *Computational Kinematics*. Springer, 2009, S. 265–272
- [Štern u. a. 2011] ŠTERN, Darko ; LIKAR, Boštjan ; PERNUŠ, Franjo ; VRTOVEC, Tomaž: Parametric modelling and segmentation of vertebral bodies in 3D CT and MR spine images. In: *Physics in medicine and biology* 56 (2011), Nr. 23, S. 7505
- [Stinton 2011] STINTON, Shaun K.: Development, validation, and application of a non-invasive spinal motion measurement system. (2011)
- [Stoer 1983] STOER, Joseph: *Einführung in die numerische Mathematik I*. Berlin Heidelberg, 1983 (Heidelberger Taschenbücher Band 105)
- [Stokes u. a. 2002] STOKES, Ian A. ; GARDNER-MORSE, Mack ; CHURCHILL, David ; LAIBLE, Jeffrey P.: Measurement of a spinal motion segment stiffness matrix. In: *Journal of biomechanics* 35 (2002), Nr. 4, S. 517–521
- [Stokes 1994] STOKES, Ian A.: Three-dimensional terminology of spinal deformity: a report presented to the Scoliosis Research Society by the Scoliosis Research Society Working Group on 3-D terminology of spinal deformity. In: *Spine* 19 (1994), Nr. 2, S. 236–248

- [Stokes und Gardner-Morse 1995] STOKES, Ian A. ; GARDNER-MORSE, Mack: Lumbar spine maximum efforts and muscle recruitment patterns predicted by a model with multijoint muscles and joints with stiffness. In: *Journal of Biomechanics* 28 (1995), Nr. 2, S. 173–186
- [Stokes und Gardner-Morse 2003] STOKES, Ian A. ; GARDNER-MORSE, Mack: Spinal stiffness increases with axial load: another stabilizing consequence of muscle action. In: *Journal of electromyography and kinesiology* 13 (2003), Nr. 4, S. 397–402
- [Strubecker 1969] STRUBECKER, Karl: *Differentialgeometrie Bd. I-III*. Berlin : Walter de Gruyter, 1969 (Sammlung Götschen)
- [Struik 1988] STRUIK, Dirk J.: *Lectures on Classical Differential Geometry*. second. New York : Dover, 1988. – ISBN 0-486-65609-8
- [Syczewska u. a. 1999] SYCZEWSKA, Malgorzata ; ÖBERG, Tommy ; KARLSSON, Dan: Segmental movements of the spine during treadmill walking with normal speed. In: *Clinical biomechanics* 14 (1999), Nr. 6, S. 384–388
- [Tändl 2009] TÄNDL, Martin: *Dynamic Simulation and Design of Roller Coaster Motion*. Düsseldorf : VDI Verlag, 2009 (Rechnerunterstützte Verfahren). – ISBN 978-3-18-342320-0
- [Tändl u. a. 2007] TÄNDL, Martin ; KECSKEMÉTHY, Andrés ; SCHNEIDER, Martin: A Design Environment for Industrial Roller Coasters. In: *Proceeding of the ECCOMAS Thematic Conference on Advances in Computational Multibody Dynamics*, 2007
- [Terry und Roberts 1968] TERRY, CT ; ROBERTS, Verne L.: A viscoelastic model of the human spine subjected to +g accelerations. In: *Journal of Biomechanics* 1 (1968), Nr. 2, S. 161–168
- [Theetten u. a. 2008] THEETTEN, Adrien ; GRISONI, Laurent ; ANDRIOT, Claude ; BARSKY, Brian: Geometrically exact dynamic splines. In: *Computer-Aided Design* 40 (2008), Nr. 1, S. 35–48
- [Thurston und Harris 1983] THURSTON, AJ ; HARRIS, JD: Normal kinematics of the lumbar spine and pelvis. In: *Spine* 8 (1983), Nr. 2, S. 199–205
- [Turner u. a. 1956] TURNER, M. J. ; CLOUGH, R. W. ; MARTIN, H. C. ; TOPP, L. J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 23 (1956), Nr. 9, S. 805–823

- [Turner-Smith u. a. 1988] TURNER-SMITH, Alan R. ; HARRIS, J D. ; HOUGHTON, Gregory R. ; JEFFERSON, Rosalind J.: A method for analysis of back shape in scoliosis. In: *Journal of biomechanics* 21 (1988), Nr. 6, S. 497–509
- [Valentini 2012] VALENTINI, Pier P.: Modeling human spine using dynamic spline approach for vibrational simulation. In: *Journal of Sound and Vibration* (2012)
- [Vassilev 1996] VASSILEV, Tzvetomir I.: Fair Interpolation and approximation of B-splines by energy minimization and points insertion. In: *Computer Aided Design* 28 (1996), Nr. 9, S. 754–760
- [Villarraga u. a. 2005] VILLARRAGA, Marta L. ; BELLEZZA, Anthony J. ; HARRIGAN, Timothy P. ; CRIPTON, Peter A. ; KURTZ, Steven M. ; EDIDIN, Avram A.: The biomechanical effects of kyphoplasty on treated and adjacent nontreated vertebral bodies. In: *Journal of spinal disorders & techniques* 18 (2005), Nr. 1, S. 84–91
- [Vrtovec u. a. 2008] VRTOVEC, Tomaž ; LIKAR, Boštjan ; PERNUŠ, Franjo: Quantitative analysis of spinal curvature in 3D: application to CT images of normal spine. In: *Physics in medicine and biology* 53 (2008), Nr. 7, S. 1895
- [Vrtovec u. a. 2009] VRTOVEC, Tomaž ; PERNUŠ, Franjo ; LIKAR, Boštjan: A review of methods for quantitative evaluation of spinal curvature. In: *European Spine Journal* 18 (2009), Nr. 5, S. 593–607
- [White und Panjabi 1990] WHITE, Augustus A. ; PANJABI, Manohar M.: *Clinical biomechanics of the spine*. Bd. 2. Lippincott Philadelphia, 1990
- [Whittle 2007] WHITTLE, Michael W.: *Gait Analysis - An Introduction*. fourth. Philadelphia : Elsevier Ltd, 2007. – ISBN 0-7506-8883-1
- [Wilson 1983] WILSON, Frank C.: *The musculoskeletal system: basic processes and disorders*. Lippincott Williams & Wilkins, 1983
- [Wolf und Senesh 2011] WOLF, Alon ; SENESH, Merav: Estimating joint kinematics from skin motion observation: modelling and validation. In: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 14 (2011), Nr. 11, S. 939–946
- [Wolf u. a. 2001] WOLF, Alon ; SHOHAM, Moshe ; MICHAEL, Shnider ; MOSHE, Roffman: Morphometric study of the human lumbar spine for operation–workspace specifications. In: *Spine* 26 (2001), Nr. 22, S. 2472–2477

- [Womack u. a. 2011] WOMACK, Wesley ; LEAHY, P D. ; PATEL, Vikas V. ; PUTTLITZ, Christian M.: Finite element modeling of kinematic and load transmission alterations due to cervical intervertebral disc replacement. In: *Spine* 36 (2011), Nr. 17, S. E1126–E1133
- [Wong und Wong 2008] WONG, Wai Y. ; WONG, Man S.: Trunk posture monitoring with inertial sensors. In: *European Spine Journal* 17 (2008), Nr. 5, S. 743–753
- [Wu u. a. 2002] WU, Ge ; SIEGLER, Sorin ; ALLARD, Paul ; KIRTLEY, Chris ; LEARDINI, Alberto ; ROSENBAUM, Dieter ; WHITTLE, Mike ; D’LIMA, Darryl D. ; CRISTOFOLINI, Luca ; WITTE, Hartmut u. a.: ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion, part I: ankle, hip, and spine. In: *Journal of biomechanics* 35 (2002), Nr. 4, S. 543–548
- [Yang u. a. 2007] YANG, Benson P. ; YANG, Carina W. ; ONDRA, Stephen L.: A novel mathematical model of the sagittal spine. In: *Spine* 32 (2007), Nr. 4, S. 466–470
- [Yang u. a. 2008] YANG, Zhengyi ; MA, Heather T. ; WANG, Deming ; LEE, Raymond: Error analysis on spinal motion measurement using skin mounted sensors. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 2008. EMBS 2008. 30th Annual International Conference of the IEEE IEEE (Veranst.)*, 2008, S. 4740–4743
- [Zhang u. a. 2013] ZHANG, X ; AIYANGAR, A ; ZHENG, L ; TASHMAN, S ; ANDERST, W: Capturing Three-dimensional In Vivo Lumbar Intervertebral Joint Kinematics Using Dynamic Stereo-X-ray Imaging. In: *Journal of biomechanical engineering* (2013)
- [Zhang und Xiong 2003] ZHANG, Xudong ; XIONG, Jinjun: Model-guided derivation of lumbar vertebral kinematics in vivo reveals the difference between external marker-defined and internal segmental rotations. In: *Journal of biomechanics* 36 (2003), Nr. 1, S. 9–17
- [Zheng u. a. 2003] ZHENG, Yalin ; NIXON, MS ; ALLEN, R: Lumbar spine visualisation based on kinematic analysis from videofluoroscopic imaging. In: *Medical engineering & physics* 25 (2003), Nr. 3, S. 171–179
- [Zienkiewicz 1975] ZIENKIEWICZ, Olgierd C.: Methode der finiten Elemente. In: *Muenchen: Hanser, 1975* 1 (1975)
- [Zienkiewicz und Taylor 2000] ZIENKIEWICZ, Olgierd C. ; TAYLOR, Robert L.: *The Finite Element Method: Solid Mechanics*. Bd. 2. Butterworth-heinemann, 2000